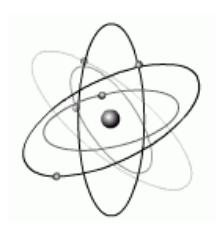




Akademia Górniczo-Hutnicza
im. Stanisława Staszica w Krakowie

Wydział Fizyki i Informatyki
Stosowanej



Praca magisterska

Jan Gajewski

kierunek studiów: fizyka techniczna

specjalność: fizyka jądrowa

Kształtowanie impulsów i optymalizacja szumowa systemu odczytu sygnałów z detektora półprzewodnikowego

Opiekun: dr hab. Marek Idzik

Kraków, lipiec 2007

Oświadczam, świadomy odpowiedzialności karnej za poświadczenie nieprawdy, że niniejszą pracę dyplomową wykonałem osobiście i samodzielnie i nie korzystałem ze źródeł innych niż wymienione w pracy.

Kraków, 19 lipca 2007

**Tematyka pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej Jana Gajewskiego,
studenta V roku studiów kierunku fizyka techniczna, specjalności fizyka
jądrowa**

Temat pracy magisterskiej: **Kształtowanie impulsów i optymalizacja szu-
mowa systemu odczytu sygnałów z detektora półprzewodnikowego**

Opiekun pracy: dr hab. Marek Idzik

Recenzent pracy: prof. dr hab. Władysław Dąbrowski

Miejsce praktyki dyplomowej: WFiIS AGH, Kraków

Program pracy magisterskiej i praktyki dyplomowej

1. Omówienie realizacji pracy magisterskiej z opiekunem.
2. Zebranie i opracowanie literatury dotyczącej tematu pracy.
3. Praktyka dyplomowa:
 - projekt układu elektronicznego,
 - wykonanie oraz testy układu elektronicznego własnego projektu,
 - dyskusja i analiza wyników pomiarów,
 - sporządzenie sprawozdania z praktyki.
4. Kontynuacja obliczeń związanych z tematem pracy magisterskiej.
5. Zebranie i opracowanie wyników obliczeń i pomiarów.
6. Opracowanie redakcyjne pracy.

Termin oddania w dziekanacie: 23 lipca 2007

.....
(podpis kierownika zakładu)

.....
(podpis opiekuna)

Merytoryczna ocena pracy przez opiekuna:

Końcowa ocena pracy przez opiekuna:

Data:

Podpis:

Merytoryczna ocena pracy przez recenzenta:

Końcowa ocena pracy przez recenzenta:

Data:

Podpis:

Skala ocen: 6.0 – celująca, 5.0 – bardzo dobra, 4.5 – ponad dobra, 4.0 – dobra, 3.5 – ponad dostateczny, 3.0 – dostateczna, 2.0 – niedostateczna

Spis treści

Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń	2
Wstęp	3
1. Szumy w układach elektronicznych	5
1.1. Szumy termiczne (szumy Johnsona)	6
1.2. Szumy śrutowe	6
1.3. Szumy typu $\frac{1}{f}$	7
1.4. Inne rodzaje szumów	7
2. Tor odczytu sygnału z detektora	9
2.1. Detektor półprzewodnikowy	10
2.1.1. Właściwości elektryczne detektora	10
2.1.2. Pojemność detektora	13
2.1.3. Prądy upływu detektora	14
2.1.4. Generacja impulsów w detektorze	16
2.1.5. Prądy indukowane	19
2.2. Przedwzmacniacz ładunkowy	24
2.2.1. Właściwości szumowe przedwzmacniacza	27
2.3. Filtracja i kształtowanie sygnału	34
2.3.1. Dopasowany filtr optymalny	36
2.3.2. Różne techniki filtracji	42
2.3.3. Porównanie różnych technik filtracji	51
3. Część praktyczna pracy	64
3.1. Projekt filtru	64
3.1.1. Dobieranie pojemności i ustawianie stałych czasowych	65
3.2. Przebiegi czasowe	68
3.2.1. Porównanie przebiegów czasowych	73
3.2.2. Widma częstotliwościowe	75
3.3. Filtracja szumów	76
3.3.1. Filtracja szumów białych	76
3.3.2. Filtracja szumów typu $\frac{1}{f}$	80
3.3.3. Filtracja szumów rzeczywistego wzmacniacza	83
Podsumowanie pracy	88
Załączniki	91
A. Dokładne wyliczenie szumów ekwiwalentnych przedwzmacniacza ładunkowego	91
B. Odpowiedź wzmacniacza ładunkowego na wymuszenie prądowe	95
Bibliografia	97
Spis rysunków	98
Spis tabel	101

Wykaz ważniejszych skrótów i oznaczeń

q, e	– ładunek elektronu ($q = 1,602 \cdot 10^{-19} \text{ C}$)
T	– temperatura
k	– stała Boltzmannna ($k = 1,38 \cdot 10^{-23} \frac{\text{J}}{\text{K}}$)
R	– rezystancja
N_A	– koncentracja domieszek akceptorowych
N_D	– koncentracja domieszek donorowych
ε₀	– stała elektryczna próżni ($\epsilon_0 = 8,85 \cdot 10^{-12} \frac{\text{F}}{\text{m}}$)
ε	– względna stała elektryczna danego materiału (np. dla krzemu $\epsilon = 11,7$)
μ_h	– ruchliwość dziur (w krzemie $\mu_h = 450 \frac{\text{cm}^2\text{V}}{\text{s}}$)
μ_e	– ruchliwość elektronów (w krzemie $\mu_e = 1450 \frac{\text{cm}^2\text{V}}{\text{s}}$)
μ₀	– ruchliwość nośników ładunku w materiale półprzewodnika (w zależności od rodzaju domieszkowania będą to elektrony lub dziury)
C_{ox}	– pojemność powierzchniowa tlenku bramkowego tranzystora MOS
A	– wzmocnienie
N_{e-h}	– liczba par elektron – dziura wygenerowanych przez cząstkę w detektorze
H(s)	– funkcja przenoszenia filtru
σ_{noise}	– wartość średniokwadratowa mocy szumów
SNR	– stosunek sygnału do szumu (ang. <i>signal – to – noise ratio</i>)
ENC	– ekwiwalentny ładunek szumowy (ang. <i>equivalent noise charge</i>)
rms, V_{rms}	– wartość skuteczna szumów (ang. <i>root mean square</i>)

Wstęp

Detekcja promieniowania jest dziedziną, która obecnie rozwija się bardzo dynamicznie. Znajduje ona zastosowanie w wielu aspektach nauki jak i życia codziennego, poczynając od fizyki wysokich energii, poprzez badania strukturalne, aż to zastosowań medycznych. Jednym z głównych kierunków jej rozwoju są detektory półprzewodnikowe, które są obecnie coraz to chętniej stosowane, zastępując często używane dotychczas detektory gazowe i scyntylicyjne. Podstawowym problemem przy ich stosowaniu jest słaby sygnał generowany w detektorze, co wynika z braku wewnętrznego wzmocnienia. Pociąga to za sobą problemy z ekstrakcją sygnału radiometrycznego z poziomu szumów. W związku z tym powstała dziedzina elektroniki zwana elektroniką *front – end*. Jest to dedykowana elektronika odpowiedzialna za odbiór i wstępną obróbkę sygnału. Celem zminimalizowania zakłóceń transmisyjnych i pojemności pasywnych znajduje się ona w bezpośredniej bliskości detektora. Na elektronikę tego typu nakładane są bardzo wysokie wymagania. Musi być ona niskoszumna, szybka i często również odporna na promieniowanie. Celem niniejszej pracy jest przegląd i analiza technik ekstrakcji sygnału radiometrycznego z detektora półprzewodnikowego.

W pierwszej części pracy przedstawiono skróconą teorię szumów. Dokonano również krótkiego przeglądu rodzajów szumów, z jakimi spotykamy się w elektronice, z wyszczególnieniem szumów istotnych przy detekcji promieniowania detektorem półprzewodnikowym.

W drugiej części pracy opisano pełny tor odczytu sygnału z detektora półprzewodnikowego. Na wstępie opisano sam detektor półprzewodnikowy oraz przeanalizowano proces generacji sygnału. Na początku przedstawiono tu podstawowe oddziaływania promieniowania jonizującego z materią. Następnie opisano zasadę działania przedwzmacniacza ładunkowego, z dokładnym wyliczeniem szumów przez niego generowanych. W ostatniej części tego rozdziału przedstawiono problematykę analogowej filtracji sygnału w elektronice jądrowej. Pokazano tu teorię filtru optymalnego oraz dokonano przeglądu różnych technik filtracji wykorzystywanych we współczesnej elektronice *front – end*. Na końcu tego rozdziału porównano różne filtry pod względem czasowych właściwości impulsów z nich wychodzących jak i pod względem filtracji szumów. W szczególności skupiono się tu na filtrach pseudogaussowskich z biegunami rzeczywistymi i zespolonymi.

W części praktycznej pracy przedstawiono projekt, realizację oraz wyniki testów filtru pseudogaussowskiego skonstruowanego tak, by jego funkcja przenoszenia mogła

posiadać bieguny zarówno rzeczywiste jak i zespolone. W sposób praktyczny pokazano tu porównanie obu tych technik filtracji, których teoria przedstawiona została w poprzednim rozdziale. Przeprowadzono pomiary zarówno amplitudowe jak i szumowe w dziedzinie częstotliwości i czasu.

1. Szумы w układach elektronicznych

Szумы są zjawiskiem całkowicie stochastycznym. W układach elektronicznych są one wynikiem przypadkowych fluktuacji gęstości nośników ładunku, wynikających z ziarnistej struktury materii. Przypadkowy ruch ładunków powoduje fluktuacje wartości prądu bądź napięcia wokół wartości średniej. Rodzaj i właściwości szumu zależą od rodzaju i sposobu wykonania elementu, który generuje dany szum oraz od warunków jego pracy. Wypadkowy szum układu elektronicznego jest superpozycją poszczególnych rodzajów szumów każdego elementu w układzie.

Ze względu na statystyczny charakter szumów, zagadnienie to możemy opisywać językiem statystyki, określając wariancję szumu:

$$\overline{[s(t) - \overline{s(t)}]^2} = \sigma_{noise}^2 = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{\frac{T}{2}} [s(t) - \overline{s(t)}]^2 p(s, t) dt. \quad (1.1)$$

W zależności tej symbol „ $\overline{s(t)}$ ” oznacza uśrednienie w czasie, a $p(s, t)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa rozkładu amplitudy przebiegu $s(t)$. Symbol $s(t)$ może oznaczać tu sygnał prądowy $i(t)$ (wyrażony w A) lub napięciowy $V(t)$ (wyrażony w V).

Ponieważ wartość chwilowa szumu jest nieprzewidywalna wprowadza się funkcję zwaną gęstością widmową mocy szumów. Określa ona częstotliwościową zależność wartości kwadratu napięcia lub prądu i wyraża się wzorami:

$$S_I = \frac{d\langle i_N^2 \rangle}{df} \quad - \text{gęstość widmowa mocy szumów prądowych} \quad (1.2)$$

$$S_V = \frac{d\langle v_N^2 \rangle}{df} \quad - \text{gęstość widmowa mocy szumów napięciowych} \quad (1.3)$$

Gęstość widmowa mocy szumów podawana jest w $\frac{V^2}{Hz}$ lub $\frac{A^2}{Hz}$. Ze względu na zależność od częstotliwości możemy wyróżnić kilka podstawowych rodzajów szumów:

Szумы białe – są one niezależne od częstotliwości, zatem ich widmo częstotliwościowe jest płaskie

Szумы różowe – są to szумы o opadającej jak $\frac{1}{f}$ charakterystyce częstotliwościowej

Szумы czerwone – są to szумы o charakterystyce częstotliwościowej typu $\frac{1}{f^2}$

W teorii analizy szumowej obowiązuje prawo przenoszenia szumów [5]. Mówi ono, że jeżeli szum o gęstości widmowej mocy określonej przez jednostronną funkcję $S_{in}(f)$ jest przenoszony przez układ o transmitancji opisanej funkcją $H(s)$, to szum wyjściowy opisany będzie gęstością widmową mocy $S_{out}(f)$ wyrażoną wzorem:

$$S_{out}(f) = S_{in}(f) |H(f)|^2, \quad (1.4)$$

przy czym $|H(f)| = |H(s = 2\pi jf)|$. Korzystając z tego twierdzenia można podać wzór na wartość średniokwadratową szumów na wyjściu układu o funkcji przenoszenia $H(s)$:

$$\sigma_{noise}^{out} = \sqrt{\int_0^{\infty} S_{in}(f) |H(f)|^2 df}. \quad (1.5)$$

Poniżej opisano pokrótce podstawowe rodzaje szumów, z jakimi najczęściej można się spotkać w elektronice.

1.1. Szумы termiczne (szумы Johnsona)

W temperaturze powyżej zera bezwzględnej elektrony znajdują się w nieustanym ruchu. Każdy z nich obdarzony jest elementarnym ładunkiem $e = 1,602 \cdot 10^{-19} C$. Pojawia się zatem ogromna liczba elementarnych impulsów prądowych związanych z ruchem tych pojedynczych ładunków [1]. Poruszające się stochastycznie ładunki powodują powstawanie na końcach przewodnika różnicy napięć, której gęstość widmową można opisać zależnością Nyquista:

$$\frac{d\langle v_{NT}^2 \rangle}{df} = 4kTR. \quad (1.6)$$

Korzystając z twierdzenia 1.4 otrzymuje się transformację szumu napięciowego na ekwiwalentny szum prądowy:

$$\frac{d\langle i_{NT}^2 \rangle}{df} = 4kT \frac{1}{R}. \quad (1.7)$$

Z równania 1.7 i 1.6 wynika, że gęstość widmowa mocy szumów termicznych jest stała w funkcji częstotliwości. Szum tego typu nazywamy szumem białym.

1.2. Szумы śrutowe

Szумы śrutowe, nazywane też szumami Schottky'ego, związane są zawsze z przepływem prądu przez barierę potencjału [1]. Szумы te powstają na przykład w złączach $p - n$ lub na styku *metal - półprzewodnik* w tranzystorach MOS (tzw. bariery Schottky'ego). Powstaje on z powodu fluktuacji liczby dyfundujących nośników (głównie

nośników mniejszościowych), czyli nieregularnego przechodzenia nośników przez bariery potencjału. Można wykazać, że jeżeli prąd $I(t)$ o średniej wartości \bar{I} złożony jest z serii przypadkowych, niezależnych impulsów to gęstość widmowa mocy tych szumów określona jest wzorem:

$$\frac{d\langle i_{Ns}^2 \rangle}{df} = 2q\bar{I}. \quad (1.8)$$

Gęstość widmowa mocy szumów jest niezależna od częstotliwości, zatem szum ten jest szumem białym.

1.3. Szумы typu $\frac{1}{f}$

Dokładny sposób generacji tego typu szumów jest jeszcze nie do końca zbadany. Nazwa wzięła się stąd, że gęstość widmowa tego typu szumu jest odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości, zatem będzie on dominował przy niskich częstotliwościach. Wiadomo, że za powstawanie szumu typu $\frac{1}{f}$ odpowiedzialne są efekty powierzchniowe. Swobodne nośniki ładunku są w sposób stochastyczny pułapkowane na granicach rozdziału dwu warstw [1]. Szum ten szczególnie uwidacznia się w tranzystorach MOS. Gęstość widmowa mocy szumu określona jest tu zależnością:

$$\frac{d\langle i_{N\frac{1}{f}}^2 \rangle}{df} = K_f \frac{I^a}{f^b}. \quad (1.9)$$

gdzie:

I – składowa stała prądu

K_f – stała danego materiału półprzewodnikowego silnie zależna od koncentracji domieszek

a – stała z przedziału 0,5 do 2

b – stała prawie równa jedności

1.4. Inne rodzaje szumów

Innymi, rzadziej spotykanymi we współczesnych technologiach rodzajami szumów są szумы wybuchowe i szумы lawinowe [1].

Powstawanie szumów wybuchowych związane jest z zanieczyszczeniem ciężkimi jonami kryształu półprzewodnika. Ma on szczególne znaczenie w układach scalonych (głównie we wzmacniaczach operacyjnych). Jego nazwa pochodzi od niestacjonarnych fluktuacji typu impulsowego obserwowanych na oscyloskopie. Częstotliwość impulsów szumu wybuchowego mieści się w paśmie częstotliwości akustycznych, a gęstość widmowa mocy wyraża się wzorem:

$$\frac{d\langle i_{Nw}^2 \rangle}{df} = K_w \frac{I^a}{1 + \left(\frac{f}{f_c}\right)^2}, \quad (1.10)$$

gdzie:

K_w – stała charakterystyczna dla danego przyrządu

I – składowa stała prądu

f_c – częstotliwość charakterystyczna dla danego przyrządu

a – stała w granicach 0,5 do 2

Szumy lawinowe związane są z przechodzeniem nośników przez złącze $p - n$ spolaryzowane zaporowo. Napięcie polaryzacji musi być jednak na tyle duże, aby pole elektryczne w warstwie zubożonej zapewniało nośnikom przy zderzeniach wystarczającą energię do lawinowego uwalniania par elektron – dziura. Zjawisko takiej lawinowej generacji nośników zostało wykorzystane w diodzie zenera. Gęstość widmowa mocy tego typu szumów może być opisana zależnością Hinesa:

$$\frac{d\langle i_{Nz}^2 \rangle}{df} = \frac{2q\bar{I}}{(2\pi f\tau)^2}, \quad (1.11)$$

gdzie:

\bar{I} – średnia wartość prądu złącza $p - n$ spolaryzowanego zaporowo

τ – średni czas pomiędzy zderzeniami

2. Tor odczytu sygnału z detektora

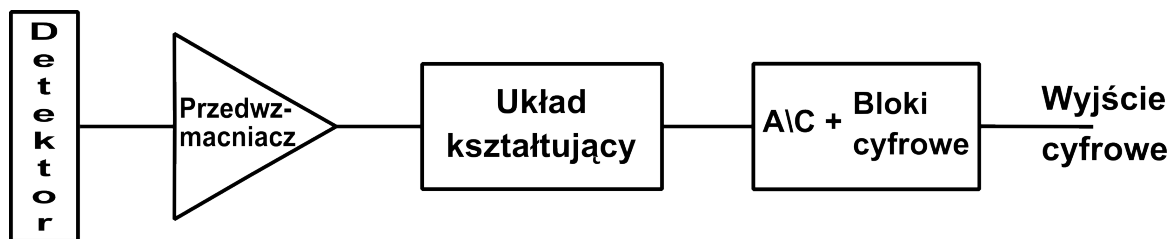
Jak już zostało wspomniane we wstępie elektronika *front – end* znajduje się w bezpośredniej bliskości detektora. Dopiero po uformowaniu sygnału i jego wzmocnieniu może on być przekazany do dalszej obróbki. W tej pierwszej fazie odczytu można wyróżnić kilka autonomicznych części.

Elementem zamieniającym energię cząstki na sygnał radiometryczny jest detektor. Rodzaj detektora jest istotny ze względu na wielkość i czas trwania sygnału, jaki z niego otrzymujemy. Detektory gazowe typu liczników proporcjonalnych po akcie jonizacji dają dość duże amplitudy sygnału i ich odczyt jest ułatwiony. Detektory scyntylacyjne czy półprzewodnikowe generują jednak słabsze sygnały, które wymagają wzmocnienia oraz kształtowania.

Najbliżej detektora znajduje się przedwzmacniacz, którego zadaniem jest wzmocnienie sygnału. Może on być różnego typu. Ponieważ przedwzmacniacz operuje na słabym sygnale, zatem to tu pojawiają się największe problemy z szumami. Wzmacniacze takie budowane są zatem nie tylko pod kątem maksymalnego wzmocnienia, ale również pod kątem minimalnych szumów przez nie generowanych.

Następnym elementem jest układ kształtujący spełniający dwojaką rolę. Pierwszym zadaniem jest ukształtowanie sygnału wyjściowego tak, aby miał możliwie krótki czas trwania, ale jednocześnie, aby był możliwy do zarejestrowania przez dalszą część elektroniki. Drugim jego zadaniem jest ograniczenie pasma przenoszenia tak, aby układ dobrze przynosił częstotliwości użyteczne, a tłumił te częstotliwości, w których przenoszony jest tylko szum.

Za układem kształtującym znajduje się przetwornik A/C lub (w najprostszym rozwiązaniu) komparator oraz elektronika cyfrowa. Schemat blokowy toru odczytowego przedstawia rysunek 2.1 poniżej.



Rysunek 2.1. Schemat blokowy układu odczytu impulsów z detektora

2.1. Detektor półprzewodnikowy

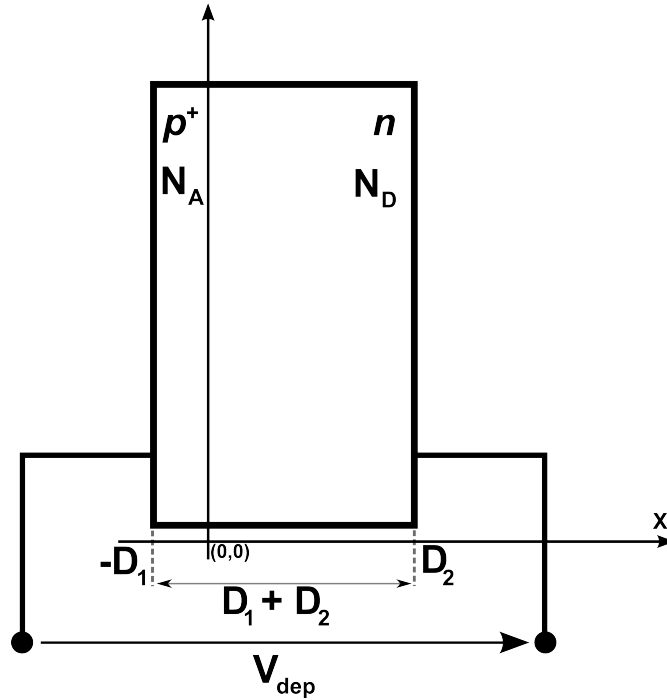
Konstrukcja detektora półprzewodnikowego opiera się na diodzie półprzewodnikowej spolaryzowanej w kierunku zaporowym odpowiednio wysokim napięciem.

Diodą półprzewodnikową nazywamy strukturę $p - n$ utworzoną przez dwa graniczące ze sobą obszary półprzewodnika: typu p oraz typu n . Obszar typu p to obszar, w którym nośnikami większościowymi są dziury, a nieruchomymi zjonizowanymi centrami domieszki akceptorowe. Obszar typu n to z kolei obszar, w którym nośnikami większościowymi są elektrony, a nieruchomymi zjonizowanymi centrami są domieszki donorowe. Złącze utworzone przez te dwa obszary spolaryzowane jest w kierunku zaporowym, gdy biegun dodatni źródła napięcia polaryzującego podłączony jest od strony typu n , a biegun ujemny od strony typu p złącza. Gdy elektrony pod wpływem pola elektrycznego przemieszczają się do obszaru typu n , natomiast dziury do obszaru typu p (stając się wówczas nośnikami mniejszościowymi) dochodzi do rekombinacji z nośnikami większościowymi. Na granicy rozdziału obu warstw powstaje obszar ładunku przestrzennego zwany obszarem zubożonym w swobodne nośniki ładunku, który to obszar rozszerza się wraz ze zwiększaniem napięcia polaryzacji zaporowej [8].

Istotą działania detektorów półprzewodnikowych jest to, by napięcie polaryzacji było na tyle duże, aby warstwa zubożona rozbudowała się na całą grubość złącza, a zatem by całe złącze stanowiło aktywną objętość czynną detektora. Napięcie takie nazywamy napięciem pełnego zubożenia V_{dep} . Cząstka jonizująca przechodząc przez detektor powoduje jonizację i generację par elektron – dziura. Przy w pełni zubożonym detektorze nośniki praktycznie nie mają szansy zrekombinować i na elektrodach detektora otrzymujemy impuls prądowy niosący całkowity ładunek wygenerowany w detektorze przez cząstkę jonizującą.

2.1.1. Właściwości elektryczne detektora

Detektory półprzewodnikowe są konstruowane zazwyczaj poprzez silne domieszkowanie akceptorowe jednej strony warstwy półprzewodnika typu n . Grubość warstwy typu n wynosi standardowo $300 \mu m$, a warstwy domieszkowanej typu p^+ około $2 \mu m$. Na rysunku 2.2 przedstawiono poglądowo wygląd takiego złącza. Aby pokazać obszar typu p^+ rysunek ten został przeskalowany.



Rysunek 2.2. Schemat złącza $p^+ - n$ z zaznaczonymi obszarami typu n i p^+ (skala niezachowana)

Na rysunku tym:

V_{dep} – napięcie pełnego zubożenia w kierunku zaporowym

D_1 i D_2 – grubości obszarów typu n oraz typu p^+

Oś współrzędnych ustawiona została tu tak, aby początek układu znajdował się na granicy rozdziału półprzewodnika typu p^+ od półprzewodnika typu n .

Dla jednowymiarowego skokowego złącza $p - n$ spolaryzowanego napięciem zaporowym V_{dep} , równym napięciu pełnego zubożenia, można wyprowadzić w sposób analityczny rozkład potencjału i pola elektrycznego w złączu.

Ze względu na symetrię możemy sprowadzić problem do jednego wymiaru. Wychodząc z równania Poissona w ogólnej postaci:

$$\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}, \quad (2.1)$$

otrzymujemy równanie sprowadzone do przestrzeni jednowymiarowej:

$$\frac{d^2 V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0}. \quad (2.2)$$

We wzorach tych:

V – napięcie w funkcji odległości od miejsca styku warstw p^+ i n

ρ – gęstość ładunku, która wynosi:

dla warstwy typu n : $\rho = qN_d$

dla warstwy typu p^+ : $\rho = -qN_d$

Algorytm obliczeń będziemy musieli rozbić na dwa obszary: dla ujemnych x (warstwa typu p^+) oraz dla dodatnich x (warstwa typu n). Wówczas pełne równania Poissona dla tej struktury przyjmują postać:

$$\begin{cases} \frac{d^2V}{dx^2} = \frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} & \text{dla } -D_1 < x < 0 \\ \frac{d^2V}{dx^2} = -\frac{\rho}{\epsilon\epsilon_0} & \text{dla } 0 < x < D_2 \end{cases} \quad (2.3)$$

W ogólnym przypadku pole elektryczne powiązane jest z potencjałem zależnością $E(x) = -grad V$, która w jednym wymiarze sprowadza się do równania $E(x) = -\frac{dV(x)}{dx}$. Całkując równania 2.3 stronami otrzymujemy:

$$\begin{cases} E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{qN_A}{\epsilon\epsilon_0}(x + C_A) & \text{dla } -D_1 < x < 0 \\ E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}(x + C_D) & \text{dla } 0 < x < D_2 \end{cases} \quad (2.4)$$

Ponieważ zakłada się, że pole elektryczne spada do zera na zewnętrznych granicach złącza, zatem $E(-D_1) = E(D_2) = 0$. Z tego wynika, że stałe we wzorze wynoszą: $C_A = D_1$ oraz $C_D = -D_2$. Otrzymujemy wzory na pole elektryczne:

$$\begin{cases} E(x) = -\frac{dV}{dx} = -\frac{qN_A}{\epsilon\epsilon_0}(x + D_1) & \text{dla } -D_1 < x < 0 \\ E(x) = -\frac{dV}{dx} = \frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}(x - D_2) & \text{dla } 0 < x < D_2 \end{cases} \quad (2.5)$$

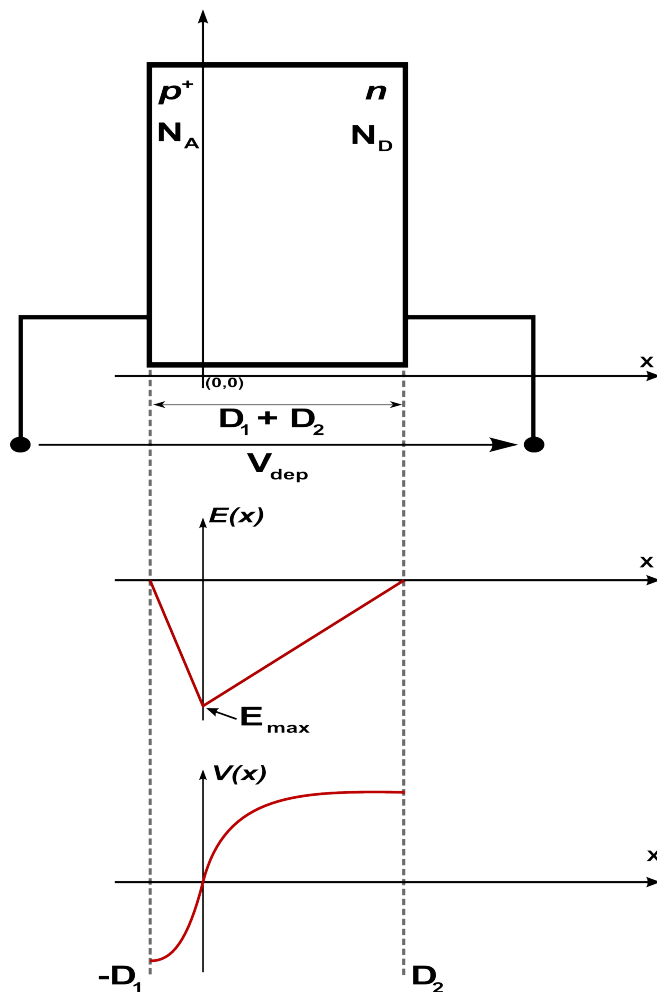
Całkując równania 2.5 stronami otrzymujemy:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{qN_A}{\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} + D_1x + B_A\right) & \text{dla } -D_1 < x < 0 \\ V(x) = -\frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - D_2x + B_D\right) & \text{dla } 0 < x < D_2 \end{cases} \quad (2.6)$$

Ponieważ poziom stały potencjału możemy ustalić dowolnie, to przyjmujemy że jest on zerowy na granicy styku obu warstw. Otrzymujemy zatem warunek brzegowy $V(0) = 0$, z którego otrzymujemy, że stałe we wzorze 2.6 wynoszą: $B_A = B_D = 0$. Otrzymujemy pełne wzory na rozkład potencjału w złączu:

$$\begin{cases} V(x) = \frac{qN_A}{\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} + D_1x\right) & \text{dla } -D_1 < x < 0 \\ V(x) = -\frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}\left(\frac{x^2}{2} - D_2x\right) & \text{dla } 0 < x < D_2 \end{cases} \quad (2.7)$$

Na wykresie 2.3 przedstawiono rozkład pola elektrycznego i potencjału w typowym złączu $p - n$. Widzimy, że pole elektryczne przyjmuje maksymalną bezwzględną wartość na styku obu warstw. Zatem $E(0) = -\frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}D_2 = E_{max}$.



Rysunek 2.3. Schemat złącza $p - n$ oraz rozkład potencjału i natężenia pola w takim złączu spolaryzowanym w kierunku zaporowym.

2.1.2. Pojemność detektora

Istotnym parametrem elektrycznym, opisującym detektor półprzewodnikowy jest jego pojemność złączowa. Wyraża się ona wzorem:

$$C(U_D) = \frac{C(0)}{\left(1 + \frac{U_D}{\varphi_0}\right)^m}, \quad (2.8)$$

gdzie:

$C(0)$ – pojemność złączowa przy zerowym napięciu polaryzacji

φ_0 – potencjał dyfuzyjny

U_D – napięcie polaryzacji w kierunku zaporowym

m – współczynnik zależny od rozkładu domieszkowania złącza. Można wykazać analitycznie, że dla rozkładu liniowego współczynnik $m = \frac{1}{3}$, zaś dla rozkładu skokowego (progowego) $m = \frac{1}{2}$ [8].

Ze wzoru widać, że pojemność złącza silnie zależy od przyłożonego napięcia zaporowego. Detektory polaryzowane są napięciem powodującym rozbudowanie się warstwy zaporowej na całą grubość detektora tak, by cała objętość detektora stanowiła obszar czynny i aby uniknąć rekombinacji nośników. Zatem pojemność detektorów półprzewodnikowych jest zatem w przybliżeniu stała i przyjmuje wartość określoną przez geometrię i materiał detektora. Nie zmienia również swojej wartości podczas pracy detektora.

2.1.3. Prądy upływu detektora

Prądy dyfuzyjne [8]

Prądy dyfuzyjne pojawiają się wszędzie tam gdzie występuje nierównomierne rozłożenie cząstek. Zjawisko to wynika z faktu, że liczba nośników, które w wyniku przypadkowych ruchów cieplnych mają składowe prędkości skierowane od obszarów o dużej koncentracji do obszarów o mniejszej koncentracji jest większa od liczby nośników o prędkości skierowanej przeciwnie. Warto zwrócić uwagę na fakt, że dyfuzja strumienia cząstek zależy od gradientu koncentracji nośników a nie od samej koncentracji. Gęstość prądu dziurowego i elektronowego powstałego pod wpływem gradientu stężeń w diodzie $p - n$ opisana może być wzorami:

$$J_h = -qD_h \nabla p \quad \text{dla dziur,} \quad (2.9)$$

$$J_e = qD_e \nabla n \quad \text{dla elektronów.} \quad (2.10)$$

We wzorach tych:

D_h i D_e są współczynnikami dyfuzji odpowiednio dziur i elektronów
 p i n są koncentracją dziur i elektronów

Prąd generacyjno – rekombinacyjny [1]

Prądy generacyjno – rekombinacyjne spowodowane są obecnością głębokich domieszek oraz defektów krystalograficznych. Powodują one powstanie w paśmie wzbudowanym półprzewodnika centrów generacyjno – rekombinacyjnych często nazywanych centrami SRH (od pierwszych liter nazwisk uczonych, którzy pierwszy raz opisali to zjawisko: Shockley, Read oraz Hall). Centra te pełnią rolę poziomów pośredniczących w przejściach elektronów między pasmem walencyjnym a pasmem przewodnictwa i odwrotnie. Gęstość prądu powodowanego tym zjawiskiem dana jest formułą:

$$J_{g-r} = qkW , \quad (2.11)$$

gdzie:

W – szerokość warstwy zubożonej (w wypadku detektora półprzewodnikowego jest ona tożsama z grubością całego detektora)

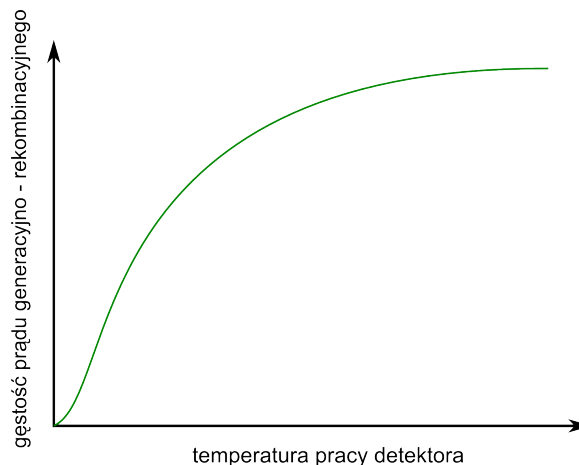
k – częstość generacji i rekombinacji. Zależy ona od koncentracji centrów SRH, powierzchni przekroju poprzecznego złącza oraz od stałej czasowej relaksacji centrum generacyjno – rekombinacyjnego.

Istotną z punktu widzenia pracy detektorów półprzewodnikowych własnością szumu generacyjno – rekombinacyjnego jest zależność gęstości prądu upływu od temperatury, wyrażająca się wzorem:

$$J_{g-r} \propto e^{-\frac{E_g}{2kT}} , \quad (2.12)$$

gdzie:

E_g – szerokość przerwy energetycznej między pasmem walencyjnym a pasmem przewodnictwa



Rysunek 2.4. Zależność gęstości prądu generacyjno – rekombinacyjnego od temperatury pracy złącza $p - n$ (jednostki względne)

Minimalizacja tego rodzaju prądów jest jednym z powodów utrzymywania detektorów w niskiej temperaturze (np. w temperaturze ciekłego azotu). Szczególne znaczenie ma to dla detektorów zbudowanych z materiałów o małym E_g , takich jak german ($E_g = 0,7 \text{ eV}$).

Prądy powierzchniowe

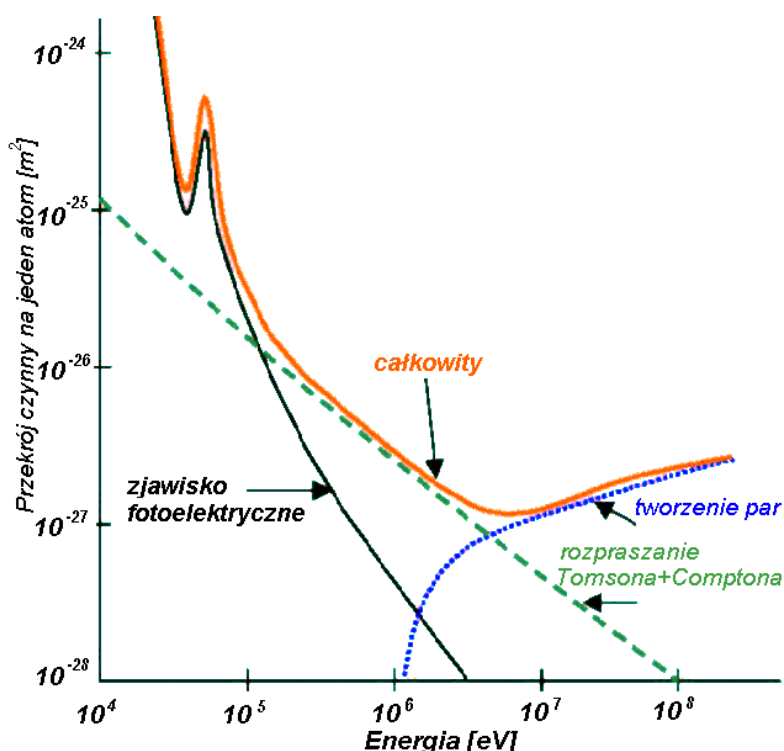
Ze względu na silną zależność zjawiska generacji prądów powierzchniowych od technologii produkcji oraz od geometrii złącza $p - n$ nie istnieje uniwersalny wzór opisujący to zjawisko.

2.1.4. Generacja impulsów w detektorze

Detekcję promieniowania przez detektor półprzewodnikowy można wyjaśnić na podstawie teorii pasmowej kryształu. Polega ona na wybijaniu przez cząstkę elektronów z pasm walencyjnych bądź głębszych pasm energetycznych do pasma przewodnictwa, w wyniku czego generowany jest swobodny elektron. Pozostawia on po sobie niezapełnioną dziurę, która podobnie jak elektron może dryfować w polu elektrycznym powodując przepływ prądu. Poniżej przedstawiono podstawowe oddziaływania cząstek, jakie mogą prowadzić do wybicia elektronu z atomu kryształu.

Oddziaływania fotonów

Fotony mogą oddziaływać z materią na wiele sposobów. W zależności od energii fotonu i właściwości ośrodka dominujący efekt się zmienia. Możemy do nich zaliczyć takie efekty jak: kreacja par elektron – pozyton, efekt fotoelektryczny i zjawisko Comptona. Poza całą gamą możliwych oddziaływań fotonów z materią tylko dwa z nich powodują generację par elektron – dziura. Są nimi: efekt fotoelektryczny i zjawisko Comptona. Przy niskich energiach fotonu dominuje efekt fotoelektryczny, a przy wyższych zjawisko Comptona. Zjawisko kreacji par istotne jest tylko dla energii fotonów powyżej $1,022 \text{ MeV}$, czyli dla fotonów gamma. Rozkład przekrojów czynnych na podstawowe zjawiska jonizacji przedstawia rysunek 2.5.



Rysunek 2.5. Rozkład makroskopowych przekrojów czynnych na procesy absorpcji i rozpraszania w funkcji energii

Efekt fotoelektryczny inaczej absorpcja fotoelektryczna polega na wybiciu przez foton elektronu z wewnętrznych powłok elektronowych atomu. Foton taki musi posiadać energię większą niż energia wiązania elektronu na danej powłoce. W efekcie tego zjawiska foton znika, a z atomu wylatuje elektron z energią kinetyczną określoną wzorem [12]:

$$E_k = h\nu - E_w , \quad (2.13)$$

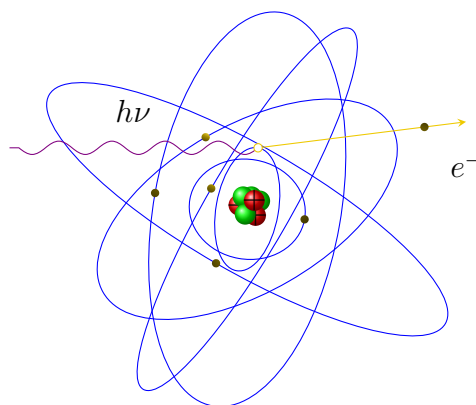
gdzie:

E_w – energia wiązania elektronu na danej powłoce

$h\nu$ – pierwotna energia fotonu

E_k – energia elektronu opuszczającego atom

W przypadku wybicia elektronu z głębszych powłok następuje przeskok elektronów z wyższych powłok na powłokę niezapełnioną. W wyniku tych przejść generowane jest promieniowanie charakterystyczne X.



Rysunek 2.6. Absorpcja fotoelektryczna fotonu o energii $h\nu$ przez elektron na powłoce K atomu z emisją elektronu

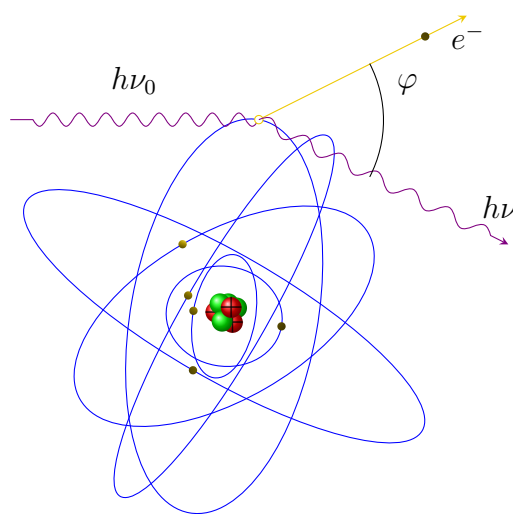
Efekt Comptona polega na zderzeniu fotonu z prawie swobodnym elektronem walencyjnym. W wyniku tego foton przekazuje część energii elektronowi, który uzyskuje energię kinetyczną. Foton traci część energii zmieniając jednocześnie kierunek dalszego lotu. Energię fotonu rozproszonego pod danym kątem można wyliczyć ze wzoru:

$$h\nu = \frac{h\nu_0}{1 + \frac{h\nu_0}{m_0c^2} \cdot (1 - \cos \varphi)}, \quad (2.14)$$

gdzie:

$h\nu_0$ to pierwotna energia fotonu, a $h\nu$ to energia fotonu po rozproszeniu pod kątem φ

m_0c^2 to energia spoczynkowa elektronu



Rysunek 2.7. Zjawisko niekoherentnego (Comptonowskiego) rozpraszania fotonu na słabo związanym elektronie walencyjnym

Oddziaływania cząstek naładowanych

Cząstki oddziałują z materią poprzez zjawiska rozpraszania oraz jonizacji. Oprócz tego może dochodzić do generacji promieniowania hamowania. W wypadku cząstek naładowanych określa się wielkość zwaną średnią stratą energii cząstki na jednostkę drogi. Wielkość tę podaje formuła Bethe – Bloch'a [12]:

$$\frac{dE}{dx} = -4\pi N_A r_e^2 m_e c^2 z^2 \frac{Z}{\beta^2 A} \left(\ln \frac{2m_e c^2 \gamma^2 \beta^2}{I} - \beta^2 - \frac{\delta}{2} \right), \quad (2.15)$$

gdzie:

N_A – liczba Avogadro ($N_A \approx 6,022 \cdot 10^{23} \frac{1}{mol}$)

r_e – tzw. klasyczny promień elektronu ($r_e \approx 2,818 \cdot 10^{-15} m$)

$m_e c^2$ – energia spoczynkowa elektronu

z – ładunek cząstki padającej

Z, A – liczba atomowa i liczba masowa jąder ośrodka

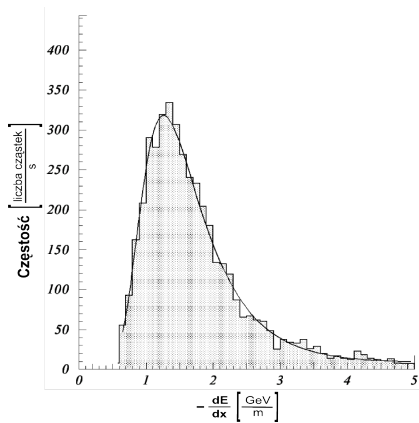
$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}, \beta = \frac{v}{c}$ – czynnik Lorentza i prędkość cząstki w jednostkach prędkości światła

I – potencjał jonizacyjny materiału ośrodka, który może być aproksymowany wyrażeniem:

$$I = (9,76 + 58,8 Z^{-1,19}) \cdot Z$$

δ – czynnik uwzględniający ekranowanie ładunku cząstki padającej przez pole elektronów ośrodka

Znak „-” w tym wzorze oznacza, że cząstka traci energię



Rysunek 2.8. Rozkład średnich strat energii cząstki relatywistycznej (rozkład Landaua) [13]

opisany jest w postaci rozkładu Landaua. Na wykresie 2.8 widać, że straty energii nie za każdym razem wynoszą tyle samo ale oscylują wokół wartości najbardziej prawdopodobnej zgodnie z rozkładem 2.8.

Ze wzoru widać, że średnie straty energii cząstki na jednostkę drogi zależą silnie od materiału ośrodka oraz od ładunku niesionego przez cząstkę. Cząstki o energii rzędu GeV , czyli naładowane cząstki relatywistyczne przechodząc przez obszar czynny detektora powodować będą pewną liczbę aktów jonizacji. Cząstki te nazywamy często cząstkami minimalnie jonizującymi ponieważ przy tak wysokiej energii przechodzą one przez detektor powodując tylko minimalną liczbą jonizacji. Straty energii mają więc kwasi – ciągły charakter. Statystyczny rozkład strat energii na jednostkę długości drogi

2.1.5. Prądy indukowane

Cząstka jonizująca w momencie przejścia przez detektor generuje wokół swojego toru nośniki ładunku w postaci par elektron – dziura. Nośniki te pod wpływem pola elektrycznego dryfują do odpowiednich elektrod: elektrony w kierunku elektrody dodatniej po stronie n , a dziury w kierunku elektrody ujemnej po stronie p^+ złącza. Indukowany prąd zaczyna płynąć w momencie, gdy ładunki zaczną się poruszać, a przestaje, gdy wszystkie one dotrą do elektrod. Przyjmując pewne założenia upraszczające można wyliczyć w sposób analityczny kształt impulsu prądowego powstałego

w wyniku przejścia cząstki jonizującej przez detektor półprzewodnikowy. Celem wyprowadzenia tego przebiegu należy zapoznać się z twierdzeniem Ramo.

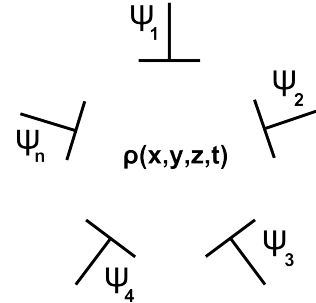
Twierdzenie Ramo

Założenia twierdzenia Ramo:

- mamy układ elektrod o ustalonych potencjałach $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$
- w obszarze zamkniętym przez te elektrody mamy ruchomy ładunek q_i opisany gęstością $\rho(x, y, z, t)$
- ładunki te poruszają się z prędkościami $v_i(x, y, z, t)$.

W efekcie tego ruchu pojawia się prąd i_1, i_2, \dots, i_n w obwodach elektrod

- $E(x, y, z, t)$ jest rozkładem pola elektrycznego w objętości zamkniętej przez elektrody
- pojawienie się ładunku ruchomego w objętości zamkniętej przez elektrody nie wpływa na rozkład pola elektrycznego, w którym się on porusza



Rysunek 2.9. Układ elektrod spełniających założenia twierdzenia Ramo

Przy spełnieniu powyższych założeń można wyliczyć prąd w k -tej elektrodzie:

$$i_k(t) = \sum_i q_i W_k(x_i, y_i, z_i) v_i(t) . \quad (2.16)$$

Sumowanie następuje tu po wszystkich ruchomych ładunkach.

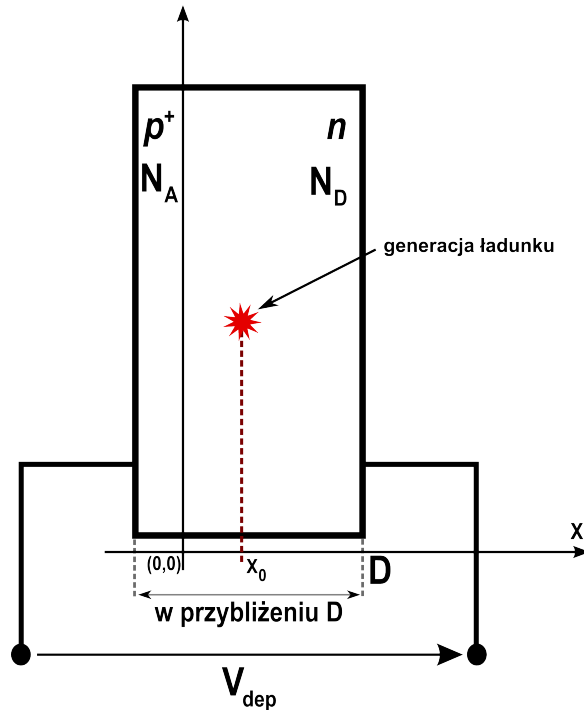
$W_k(x, y, z)$ to pole wagowe. Jest to pole w danym punkcie objętości zamkniętej elektrodami, wyliczone przy założeniu, że k -ta elektroda jest na potencjale $1 V$, pozostałe elektrody są uziemione, oraz cały ładunek w obszarze został usunięty.

Wyprowadzenie prądu indukowanego

W pewnych prostych przypadkach można w sposób analityczny wyprowadzić przebieg czasowy prądu indukowanego w detektorze półprzewodnikowym.

Zgodnie z rozważaniami z rozdziału 2.1.1 w celu uproszczenia obliczeń możemy przyjąć, że całą grubość detektora stanowi warstwa typu n . Drugim założeniem, jakie dobrze jest przyjąć celem uproszczenia obliczeń jest punktowa generacja ładunku. Zakładamy, że cały ładunek, jaki został wygenerowany przez cząstkę jonizującą w chwili początkowej znajduje się w jednym punkcie. Założenie to jest w przybliżeniu słuszne dla cząstek o małych energiach. Dla relatywistycznych cząstek naładowanych sprawa ma się jednak inaczej. Cząstka taka nie wytraca całej swojej energii podczas przejścia przez złącze, a generacja ładunku następuje na całej długości drogi tej cząstki przez detektor. Schemat detektora z wygenerowanym punktowo ładunkiem przedstawia ry-

sunek 2.10. Na rysunku tym obszar typu p^+ jest znacznie powiększony w stosunku do jego rzeczywistych rozmiarów.



Rysunek 2.10. Schemat detektora półprzewodnikowego typu złącze $p - n$ z zaznaczonym miejscem punktowej generacji

Miejsce punktowej generacji oznaczone jest na rysunku przez x_0 . Pozostałe oznaczenia tak samo jak pod rysunkiem 2.2. Ze względu na symetrię detektora będziemy rozpatrywać przypadek jednowymiarowy. Aby policzyć prąd powstający pod wpływem przelatujących cząstek jonizujących posłużymy się twierdzeniem Ramo. Przy założeniu, że wygenerowany w wyniku jonizacji ładunek w obszarze czynnym detektora nie wpływa na rozkład pola elektrycznego, oraz przy przyjęciu poprzednich założeń możemy podać wzór na indukowany prąd:

$$i(t) = q_e W(x) v_e(t) + q_h W(x) v_h(t) , \quad (2.17)$$

gdzie:

q_e i q_h to ładunki nośników, czyli elektronów i dziur

Gdy ze złącza $p^+ - n$ usuniemy cały ładunek i na końcach przyłożymy do niego różnicę napięć to złącze takie będzie zachowywać się jak kondensator płaski.

Dzięki temu możemy podać od razu wzór na pole wagowe. Pole to jest stałe w całej objętości detektora i wynosi:

$$W = \frac{1}{D} , \quad (2.18)$$

v_e oraz v_h to prędkości unoszenia elektronów i dziur, przy czym:

$$v_e = -\mu_e E(x) , \quad (2.19)$$

$$v_h = \mu_h E(x) , \quad (2.20)$$

gdzie:

$E(x)$ to natężenie pola w danym punkcie

Korzystając z wyliczonego w rozdziale 2.1.1 pola elektrycznego w złączu $p - n$ możemy przepisać wzór 2.5 w postaci:

$$E(x) = \frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}(x - D) , \quad (2.21)$$

Jest to pole elektryczne panujące w detektorze przy założeniu, że całą grubość detektora stanowi warstwa n . Znajdujemy maksimum natężenia pola. Wypada ono na styku złącza, zatem:

$$E(0) = \frac{qN_D}{\epsilon\epsilon_0}D = E_{max} . \quad (2.22)$$

Możemy więc zapisać, że:

$$E(x) = -\frac{E_{max}}{D}(x - D) . \quad (2.23)$$

To równanie podstawiamy do wzoru na prędkość unoszenia elektronów 2.19 i otrzymujemy równanie różniczkowe liniowe:

$$v_e(x) = \mu_e \frac{E_{max}}{D}(x - D) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = -\mu_e \frac{E_{max}}{D}(D - x) . \quad (2.24)$$

Przystępujemy do rozwiązania powyższego równania:

$$-\frac{dx}{(D - x)} = \mu_e \frac{E_{max}}{D} dt . \quad (2.25)$$

Całkując stronami otrzymujemy:

$$-\ln(D - x) = \mu_e \frac{E_{max}}{D} t - \ln C \Rightarrow \ln(D - x) = -\mu_e \frac{E_{max}}{D} t + \ln C . \quad (2.26)$$

Zgodnie ze wcześniej przyjętymi założeniami ładunki zostały wygenerowane punktowo w punkcie $x = x_0$ w chwili $t = 0$. Zatem:

$$\ln(D - x_0) = \ln C \Rightarrow C = D - x_0 . \quad (2.27)$$

Przekształcając wzór 2.26 otrzymujemy:

$$x(t) = D - (D - x_0) \exp \left[- \frac{E_{max} \mu_e}{D} t \right]. \quad (2.28)$$

Prędkość unoszenia elektronów w tak uformowanym polu wynosi:

$$v_e(t) = \frac{dx}{dt} = (D - x_0) \frac{E_{max} \mu_e}{D} \exp \left[- \frac{E_{max} \mu_e}{D} t \right]. \quad (2.29)$$

W analogiczny sposób można obliczyć zależność czasową prędkości unoszenia dziur:

$$v_h(t) = \frac{dx}{dt} = (D - x_0) \frac{E_{max} \mu_h}{D} \exp \left[\frac{E_{max} \mu_h}{D} t \right]. \quad (2.30)$$

Podstawiając oba równania do wzoru 2.16 wyprowadzonego z twierdzenia Ramo otrzymujemy analityczny wzór na prąd indukowany w detektorze:

$$i(t) = Q \frac{1}{D} (D - x) \frac{E_{max}}{D} \left(\mu_e \exp \left[- \frac{E_{max} \mu_e}{D} t \right] + \mu_h \exp \left[\frac{E_{max} \mu_h}{D} t \right] \right). \quad (2.31)$$

Istotnym parametrem określającym szybkość działania detektora jest czas zbierania nośników. Obliczmy czas zbierania dziur. Równanie 2.20 na prędkość unoszenia możemy przepisać w postaci:

$$v_h(t) = \mu_h E(x) \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \mu_h \frac{E_{max}}{D} (D - x). \quad (2.32)$$

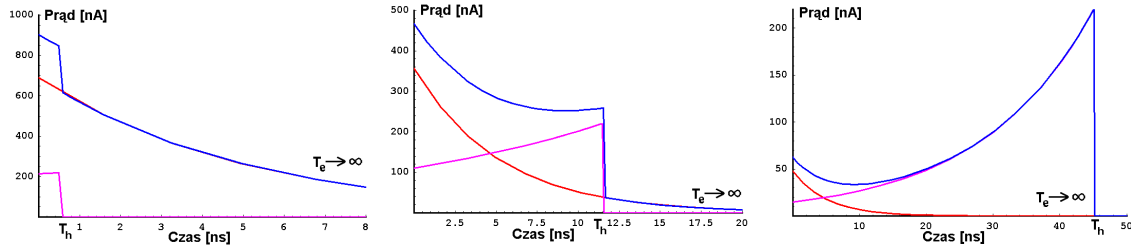
Równanie to, po przekształceniu należy scałkować stronami w odpowiednich granicach:

$$\int_{x_0}^0 \frac{D}{E_{max}} \frac{dx}{(D - x)} = \int_0^{T_h} \mu_h dt \Rightarrow T_h = - \frac{D}{E_{max} \mu_h} [\ln D - \ln(D - x_0)]. \quad (2.33)$$

Gdzie T_h jest czasem zbierania dziur na elektrodzie podłączonej od strony p^+ . Rozwiązując analogicznie podobne równanie dla elektronów otrzymujemy:

$$\int_{x_0}^D \frac{D}{E_{max}} \frac{dx}{(D - x)} = \int_0^{T_e} \mu_e dt \Rightarrow T_e = \frac{D}{E_{max} \mu_e} [\ln 0 - \ln(D - x_0)] = \infty. \quad (2.34)$$

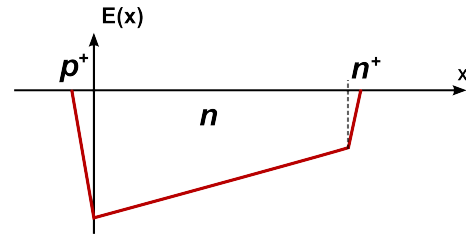
Zatem czas zbierania elektronów na elektrodzie przyłożonej od strony warstwy typu n jest nieskończony. Ma to swoje logiczne uzasadnienie. Im elektrony są bliżej końca detektora, tym teoretycznie mniejszym polem elektrycznym są przyspieszane, a więc ich prędkość unoszenia jest coraz mniejsza. Przebieg czasowy składowej elektronowej i dziurowej oraz ich sumy, dla przykładowych parametrów detektora, dla trzech charakterystycznych punktów generacji pokazany jest na rysunku 2.11. Szerokość detektora ustalona została tu na $D = 300 \mu m$, napięcie pełnego zubożenia na $V_{dep} = 60 V$, a ładunek generowany punktowo w detektorze to $Q = 23000 e$.



Rysunek 2.11. Przebieg czasowy składowej elektronowej i dziurowej dla trzech punktów generacji nośników (legenda: \sim prąd elektronowy \sim prąd dziurowy \sim suma prądu elektronowego i dziurowego)

Widzimy, że całkowity prąd jest sumą dwóch eksponent: rosnącej i malejącej. Nagły spadek prądu po czasie T_h oznacza, że wszystkie dziury dotarły już do elektrody, a w detektorze unoszone są już tylko elektrony. W rzeczywistym detektorze pole elektryczne nie jest uformo-

wane tak jak to zostało tu założone. Dla napięcia przekraczającego napięcie pełnego zubożenia i przy dodatkowej cienkiej warstwie n^+ od strony typu n , stanowiącej kontakt do niej, pole elektryczne nie maleje do zera na końcu warstwy typu n . Wynika z tego, że w rzeczywistości czas zbierania ładunków ujemnych nie jest nieskończony. Na rysunku obok pokazano rzeczywisty rozkład pola elektrycznego w złączu $p - n$. Początek osi ox umieszczony został tu na styku materiału typu p^+ i typu n .



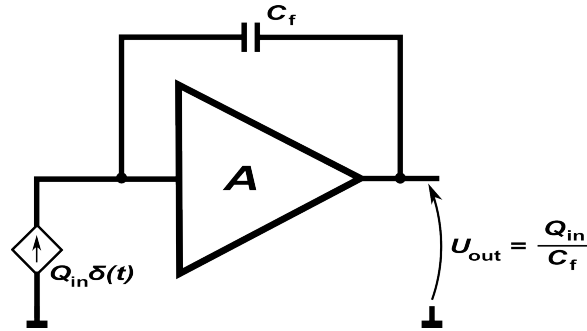
Rysunek 2.12. Rzeczywisty rozkład pola elektrycznego w złączu $p - n$

2.2. Przedwzmacniacz ładunkowy

Jak to pokazano na początku rozdziału 2, przedwzmacniacz jest częścią układu znajdującą się najbliżej detektora. Różne rodzaje wzmacniaczy, spełniające specyficzne wymagania założonego trybu pracy, należą do kategorii aktywnych układów elektroniki *front - end*. Biorąc pod uwagę specyfikę trybu pracy wzmacniacze dzielimy na [4]:

- wzmacniacze prądowe
- wzmacniacze napięciowe
- wzmacniacze ładunkowe

W elektronice *front - end* do detekcji promieniowania detektorami półprzewodnikowymi najczęściej używa się przedwzmacniaczy typu ładunkowego. Schemat podłączenia takiego wzmacniacza przedstawiony został na rysunku 2.13.



Rysunek 2.13. Schemat układu detektora i przedwzmacniacza ładunkowego

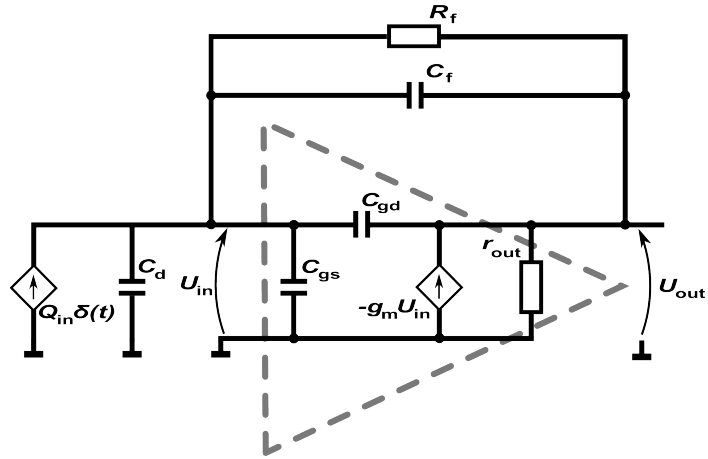
Przez $Q_{in}\delta(t)$ oznaczono tu źródło prądowe będące najprostszym schematem zastępczym detektora. Przedwzmacniaczy ładunkowych używa się z dwóch zasadniczych powodów. Po pierwsze amplituda sygnału wyjściowego takiego wzmacniacza jest proporcjonalna do ładunku generowanego w detektorze, dzięki czemu możemy badać energię cząstek. Po drugie pojemność zapięta w sprzężeniu zwrotnym, z punktu widzenia wejścia przedwzmacniacza jest w wyniku zjawiska Millera efektywnie widziana jako przemnożona przez wzmocnienie przedwzmacniacza. Dzięki temu cały wygenerowany ładunek może być zbierany przez pojemność sprzężenia, a nie przez pojemność detektora, czy pojemność wejściową przedwzmacniacza.

Zadaniem wzmacniacza ładunkoczułego (nazywanego inaczej ładunkowym) jest uformowanie odpowiedzi napięciowej $V_{out}(t)$ na prądowy impuls wejściowy $I_{in}(t)$. Głównym założeniem jest by amplituda wyjściowego sygnału napięciowego była proporcjonalna do całkowitego ładunku Q_{in} niesionego przez impuls prądowy $I_{in}(t)$. Podstawowym parametrem wzmacniacza tego typu jest jego wzmocnienie ładunkowe K_q , określane z definicji jako stosunek wartości maksymalnej odpowiedzi napięciowej do wymuszenia ładunkowego.

$$K_q = \frac{V_{out}^{max}}{Q_{in}} \quad (2.35)$$

Najczęściej wzmocnienie ładunkowe wyraża się w jednostkach $\frac{V}{e}$.

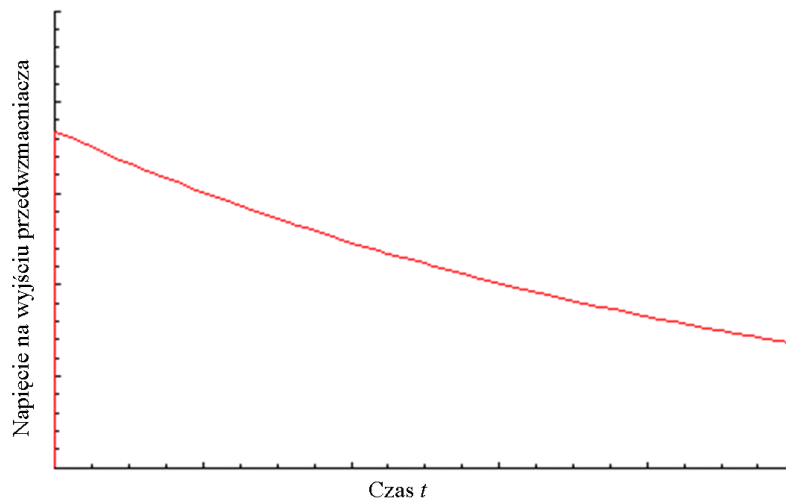
W rzeczywistym układzie największy wpływ na wzmocnienie ma transkonduktancja g_m tranzystora wejściowego przedwzmacniacza. Bez straty ogólności można rozważać działanie przedwzmacniacza ładunkowego zastępując go zastępczym schematem małosygnałowym pojedynczego tranzystora polowego. Poglądowy schemat układu przedstawia rysunek 2.14. Na rysunku zaznaczone są główne elementy wzmacniacza mające wpływ na charakterystykę przenoszenia sygnału.



Rysunek 2.14. Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem

Jak zasygnalizowano to już na początku rozdziału 2 detektor zasymulowany tu został jako impulsowe źródło prądowe $i_d = Q_{in}\delta(t)$, z napiętą równolegle pojemnością C_d . Sam wzmacniacz zastąpiono modelem małosygnalowym tranzystora wejściowego, przy czym rezystancja r_{out} zawiera w sobie również rezystancję obciążenia. Ponieważ funkcja przenoszenia takiego układu jest skomplikowana, wyprowadzenie jej zostało pokazane w załączniku. W tym rozdziale skupiono się tylko na przybliżonych rozwiązaniach i wnioskach z nich wynikających.

Wzmacniacze ładunkowe zaliczają się do kategorii wzmacniaczy całkujących. Odpowiedzią na dirakowski impuls prądowy jest skok napięcia. Dzięki zastosowaniu rezystora rozładowującego R_f sygnał po osiągnięciu maksimum ma szansę eksponencjalnie opaść, zgodnie ze stałą czasową $\tau_f = R_f C_f$. Przykład takiej odpowiedzi impulsowej przedstawiony jest na kolejnym rysunku 2.15. Jest to odpowiedź napięciowa przy założeniu wymuszenia impulsem prądowym w postaci delty Diraca i niosącym całkowity ładunek Q_{in} .



Rysunek 2.15. Odpowiedź impulsowa przedwzmacniacza ładunkowego z rezystywnym sprzężeniem zwrotnym (jednostki względne)

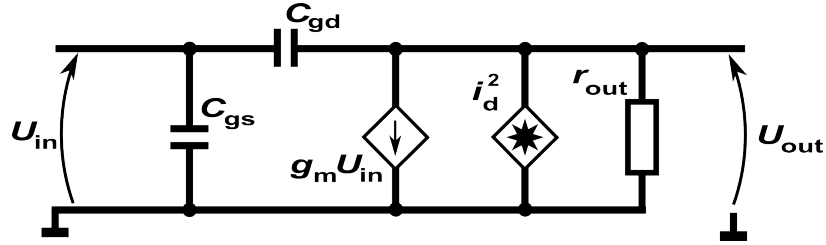
Istotną kwestią z punktu widzenia elektroniki *front – end* są szумы przedwzmacniacza. Wzmacniacze tego typu konstruowane są zazwyczaj w postaci zawiniętej kaskody. W układzie takim najbardziej widocznymi szumami są szумы tranzystora wejściowego, ponieważ są one wzmacniane przez cały układ wzmacniający z tą samą siłą, co sam sygnał wejściowy. Szумы pozostałych elementów wzmacniacza są zwykle mniej istotne z punktu widzenia wkładu do całkowitych szumów. Warto tu zwrócić uwagę na przewagę wzmacniaczy z pojedynczym wejściem nad wzmacniaczami różnicowymi. We wzmacniaczach różnicowych mamy dwa tranzystory wejściowe, co powoduje, że wkład do całkowitych szumów zwiększa się $\sqrt{2}$ razy w stosunku do rozwiązań z wykorzystaniem jednego tranzystora wejściowego. Dzieje się tak ze względu na dodawanie w kwadracie nieskorelowanych szumów. Jeżeli założymy że oba tranzystory wejściowe wzmacniacza różnicowego szumią jednakowo i każdy z nich daje na wyjściu układu sigmę szumów σ_{tr} , to całkowita sigma szumów wyniesie:

$$\sigma_{noise} = \sqrt{\sigma_{tr}^2 + \sigma_{tr}^2} = \sqrt{2}\sigma_{tr} . \quad (2.36)$$

2.2.1. Właściwości szumowe przedwzmacniacza

Każdy wzmacniacz generuje szумы które można sprowadzić do dwóch zapiętych na wejściu ekwiwalentnych źródeł szumowych: szeregowego szumowego źródła napięciowego i równoległego szumowego źródła prądowego. Poniżej pokazano jak obliczyć wartości tych źródeł szumowych.

Na rysunku 2.16 pokazano małosygnalowy schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza. Pokazano na nim również źródło szumów i_d^2 , które ma największy wpływ na szумы w układzie.



Rysunek 2.16. Tranzystor wejściowy przedwzmacniacza z prądowym źródłem szumowym kanału tranzystora

Źródło szumów i_d^2 oznacza tu szumy termiczne kanału tranzystora wejściowego oraz jego szumy typu $\frac{1}{f}$. Opisane jest to wzorem:

$$\frac{d \langle i_{Nd}^2 \rangle}{df} = i_d^2 = \frac{4kT}{R_{eqi}} + \frac{K_f g_m^2}{C_{ox}^2 W L f}, \quad (2.37)$$

gdzie:

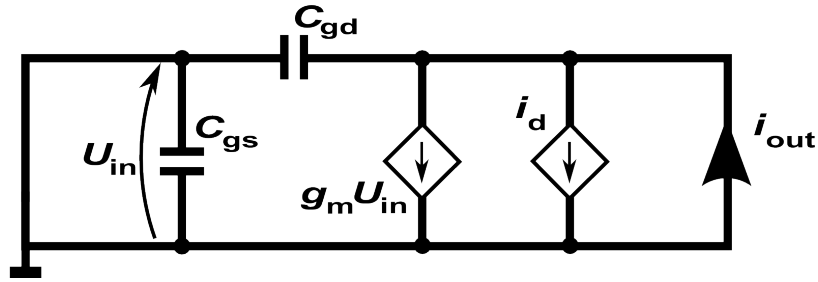
W i L są tu wymiarami geometrycznymi bramki tranzystora

R_{eqi} jest ekwiwalentną rezystancją kanału tranzystora daną (bez dowodu) wzorem:

$$R_{eqi} = \frac{3}{2} \frac{1}{g_m}. \quad (2.38)$$

Aby obliczyć szumy wyjściowe przedwzmacniacza sprowadzamy źródło szumów i_d^2 ze schematu 2.16 do dwóch ekwiwalentnych źródeł szumowych, prądowych i napięciowych podawanych na wejście przedwzmacniacza, a następnie liczymy funkcję przeniesienia tych źródeł na wyjście. dokładne obliczenia przedstawione są poniżej.

Celem obliczenia ekwiwalentnych szumów napięciowych na wejściu przedwzmacniacza sprawdzamy najpierw jak będą wyglądać szumy prądowe na jego wyjściu gdy jest on obciążony zerową impedancją. Ze względu na zerową impedancję ekwiwalentnego napięciowego źródła szumowego, na wejściu mamy zwarcie do masy. Pomijając rezystancję r_{out} , która jest na tyle duża, że praktycznie nie ma wpływu na wynik obliczeń schemat 2.16 można przerysować do postaci przedstawionej na rysunku 2.17.



Rysunek 2.17. Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez kanał tranzystora

Zamiast szumowego źródła prądowego i_d^2 pokazano tu zwykle źródło prądowe i_d .

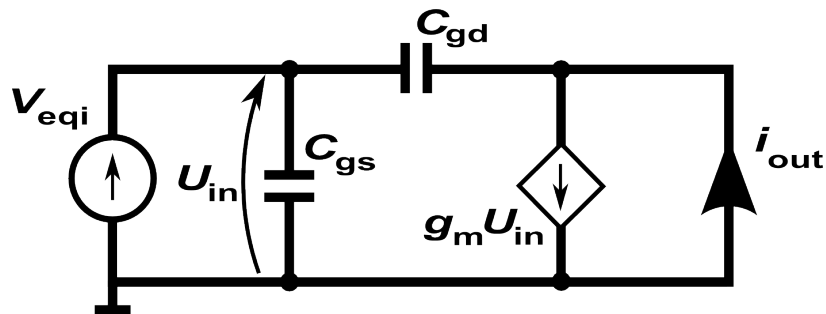
Można zauważyć teraz, że skoro zaciski pojemności C_{gs} są zwarte to napięcie $U_{in} = 0$. Zatem źródło prądowe $-g_m U_{in}$ nie daje prądu i jest po prostu rozwarciem. Skoro tak, to cały prąd ze źródła prądowego i_d popłynie przez zwarcie na wyjściu tranzystora. Można zapisać, że:

$$i_{out} = i_d . \quad (2.39)$$

A zatem szum prądowy na wyjściu układu 2.17 spowodowany szumami kanału tranzystora wynosi:

$$i_{out}^2 = i_d^2 . \quad (2.40)$$

Jeżeli znaleźliśmy już prąd wyjściowy generowany przez szumowe źródło prądowe, musimy znaleźć jeszcze prąd wyjściowy generowany przez poszukiwane przez nas ekwiwalentne źródło szumów napięciowych. Przyjmując, że rezystancja idealnego źródła prądowego i_d jest rozwarciem można przerysować schemat 2.16 do postaci jak na rysunku 2.18. Ekwiwalentne źródło szumów napięciowych v_{eqi}^2 zastąpione tu zostało zwykłym źródłem napięciowym v_{eqi} .



Rysunek 2.18. Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez ekwiwalentne źródło napięciowe

Analiza powyższego układu prowadzi do wniosku, że spadki napięć na kondensatorach C_{gs} i C_{gd} są sobie równe i wynoszą v_{eqi} . Można zatem zapisać następujące równanie:

$$i_{out} = g_m U_{in} - v_{eqi} s C_{gd} . \quad (2.41)$$

Ponieważ $U_{in} = v_{eqi}$ otrzymujemy:

$$i_{out} = (g_m - s C_{gd}) v_{eqi} . \quad (2.42)$$

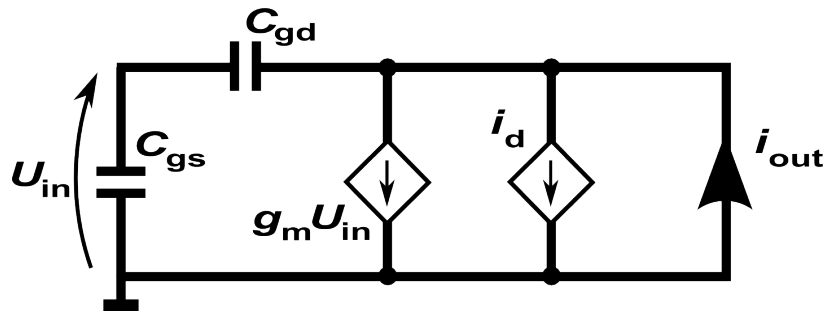
Zatem dla źródeł szumowych otrzymujemy następującą formułę na prądowe szumy wyjściowe tranzystora wejściowego przedwzmacniacza spowodowane ekwiwalentnym źródłem szumów napięciowych:

$$i_{out}^2 = |g_m - s C_{gd}|^2 v_{eqi}^2 . \quad (2.43)$$

Porównując równania 2.40 oraz 2.43 otrzymujemy formułę na ekwiwalentne źródło szumów napięciowych:

$$v_{eqi}^2 = i_d^2 \left| \frac{1}{g_m - s C_{gd}} \right|^2 . \quad (2.44)$$

W analogiczny sposób można wyliczyć wartość ekwiwalentnego źródła szumów prądowych na wejściu układu 2.16. Zakładając nieskończoną wartość rezystancji ekwiwalentnego źródła szumów prądowych oraz obciążenie wyjścia układu z rysunku 2.16 o zerowej impedancji możemy przerysować schemat 2.16 do postaci przedstawionej na rysunku 2.19.



Rysunek 2.19. Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez kanał tranzystora

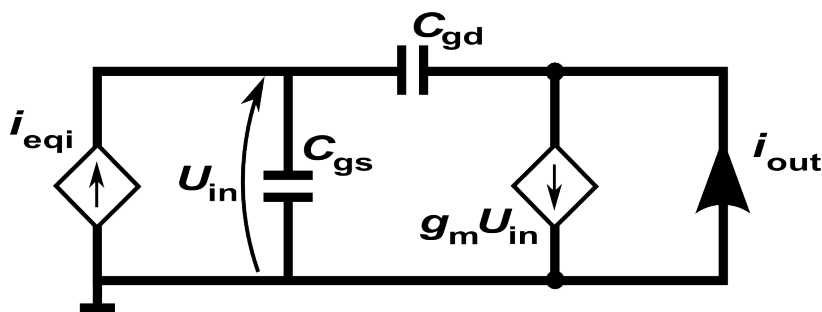
Podobnie jak wcześniej źródło szumowe i_d^2 zastąpiono tu zwykłym źródłem prądowym i_d . Można zauważyć teraz, że jeżeli zaciski obu źródeł szumowych są zwarte to cały prąd popłynie przez to zwarcie. A zatem przez gałąź z pojemnościami nie popłynie żaden prąd, a co za tym idzie nie będzie żadnego spadku napięcia na kondensatorze C_{gs} ($U_{in} = 0$). Skoro tak, to $g_m U_{in} = 0$, a prąd na wyjściu opisany jest formułą:

$$i_{out} = i_d . \quad (2.45)$$

Dla szumów otrzymujemy formułę analogiczną do poprzedniej:

$$i_{out}^2 = i_d^2 . \quad (2.46)$$

Teraz obliczamy szumy prądowe na wyjściu przy założeniu, że generowane są one przez ekwiwalentne źródło szumów prądowych podawanych na wejście układu 2.16. Schemat do obliczeń tych szumów przedstawiony został na rysunku 2.20. Zamiast szumowego źródła prądowego i_{eqi}^2 pokazano tu zwykle źródło prądowe i_{eqi} .



Rysunek 2.20. Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez ekwiwalentne źródło prądowe

Zakładamy, że licząc wkład od danego źródła drugie jest rozwarciem (zgodnie z zasadą, że impedancja idealnego źródła prądowego jest nieskończona). Wówczas prąd wyjściowy dany jest wzorem:

$$i_{out} = i_{out\ m} + i_{out\ eqi} , \quad (2.47)$$

gdzie:

$i_{out\ m}$ jest prądem wyjściowym generowanym przez źródło prądowe $g_m U_{in}$

$i_{out\ eqi}$ jest prądem wyjściowym generowanym przez ekwiwalentne źródło prądowe i_{eqi}

Dla samego źródła $g_m U_{in}$ otrzymujemy, że:

$$i_{out\ m} = g_m U_{in} , \quad (2.48)$$

a w gałęzi z pojemnościami nie płynie żaden prąd. Dla samego źródła i_{eqi} otrzymujemy klasyczny dzielnik prądowy, a zatem:

$$i_{out\ eqi} = -i_{eqi} \frac{\frac{1}{sC_{gs}}}{\frac{1}{sC_{gs}} + \frac{1}{sC_{gd}}} , \quad (2.49)$$

$$i_{gs} = -i_{eqi} \frac{\frac{1}{sC_{gd}}}{\frac{1}{sC_{gs}} + \frac{1}{sC_{gd}}} , \quad (2.50)$$

gdzie i_{gs} jest prądem płynącym przez kondensator C_{gs} . Otrzymujemy formułę na spadek napięcia U_{in} :

$$U_{in} = -i_{eqi} \frac{\frac{1}{sC_{gd}}}{\frac{1}{sC_{gs}} + \frac{1}{sC_{gd}}} \frac{1}{sC_{gs}} . \quad (2.51)$$

Dodając prądy opisane równaniami 2.48 oraz 2.49, przy czym w równaniu 2.48 napięcie U_{in} opisane jest równaniem 2.51 otrzymujemy po uproszczeniach:

$$i_{eqi} = i_d \frac{s(C_{gs} + C_{gd})}{g_m - sC_{gd}} . \quad (2.52)$$

Dla szumów otrzymujemy:

$$i_{eqi}^2 = i_d^2 \left| \frac{s(C_{gs} + C_{gd})}{g_m - sC_{gd}} \right|^2 . \quad (2.53)$$

Podstawiając do tego równanie 2.44 otrzymujemy:

$$i_{eqi}^2 = v_{eqi}^2 |s(C_{gs} + C_{gd})|^2 . \quad (2.54)$$

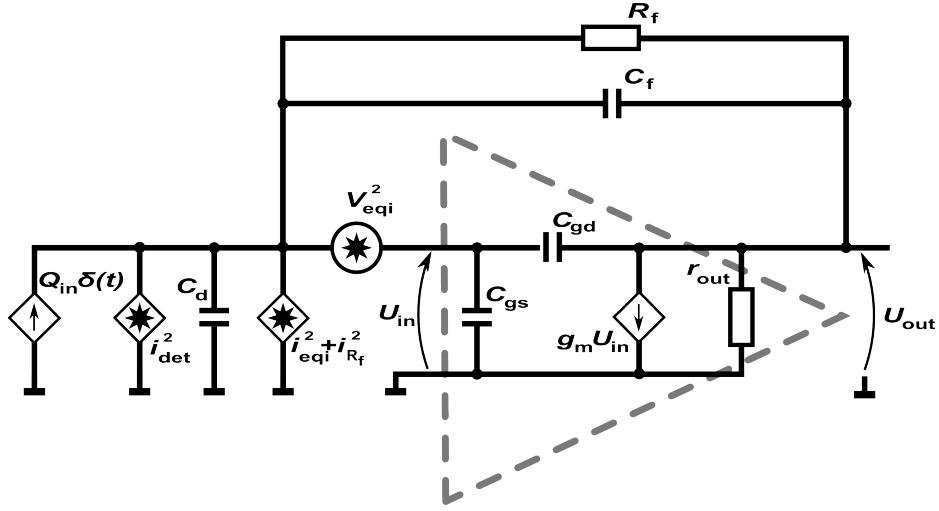
Otrzymaliśmy wzory na ekwiwalentne źródło szumów napięciowych (wzór 2.44) i ekwiwalentne źródło szumów prądowych (wzór 2.54). Oprócz obliczonych tu źródeł szumowych istotnymi szumami są prądy upływu detektora oraz szumy termiczne rezystancji rozładowującej sprzężenia zwrotnego. Szumy rezystancji rozładowującej opisane są zgodnie z rozdziałem 1.1 wzorem:

$$\frac{d \langle i_{NR_f}^2 \rangle}{df} = i_{R_f}^2 = \frac{4kT}{R_f} , \quad (2.55)$$

a szumy związane z prądami upływu detektora wzorem:

$$\frac{d \langle i_{Ndet}^2 \rangle}{df} = i_{det}^2 = 2qI_0 . \quad (2.56)$$

I_0 jest tu wartością prądu upływu detektora. Schemat uwzględniający wszystkie te rodzaje szumów przedstawiony został na rysunku 2.21.



Rysunek 2.21. Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i wszystkimi źródłami szumów

Wyprowadzenie przenoszenia szumów ekwiwalentnych zostało przedstawione w załączniku A. Poniżej przedstawiono tylko wyniki tych obliczeń i wnioski z nich płynące.

Szum na wyjściu układu z rysunku 2.21 pochodzący od ekwiwalentnych źródeł przedwzmacniacza opisany jest wzorem:

$$U_{out}^2 = \left| \frac{C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f}{C_{gd} + C_f} \right|^2 v_{eqi}^2 . \quad (2.57)$$

Do tego należy dodać jeszcze wcześniej już wspomniane szumy prądowe rezystancji R_f , oraz w szczególności szumy związane z prądami upływu detektora. Przenoszenie tych szumów na wyjście układu 2.21 przedstawione zostało w załączniku B, a opisane jest wzorem:

$$U_{out}^2 = \left| \frac{1}{s(C_{gd} + C_f)} \right|^2 (i_{det}^2 + i_{R(f)}^2) . \quad (2.58)$$

Dodając te dwa rodzaje szumów otrzymujemy wzór na całkowite szumy na wyjściu układu z rysunku 2.21:

$$U_{out}^2 = \left| \frac{C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f}{C_{gd} + C_f} \right|^2 v_{eqi}^2 + \left| \frac{1}{s(C_{gd} + C_f)} \right|^2 (i_{det}^2 + i_{R(f)}^2) . \quad (2.59)$$

Wyciągając przed nawias kombinację pojemności stojącą przy v_{eqi}^2 otrzymujemy:

$$U_{out}^2 = \left| \frac{C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f}{C_{gd} + C_f} \right|^2 \left(v_{eqi}^2 + \left| \frac{1}{s(C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f)} \right|^2 (i_{det}^2 + i_{R(f)}^2) \right) . \quad (2.60)$$

Wyrażenie przed nawiasem równania 2.60 jest kwadratem wzmocnienia całego układu z rysunku 2.21:

$$A = \frac{C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f}{C_{gd} + C_f} . \quad (2.61)$$

Celem uproszczenia wzoru 2.60 bierzemy pod uwagę jedynie szumy tranzystora oraz szumy związane z detektorem. Po przyjęciu tego założenia wzór 2.60 upraszcza się do postaci:

$$U_{out}^2 = A^2 \left(v_{eqi}^2 + \frac{1}{\omega^2 C^2} i_{det}^2 \right) , \quad (2.62)$$

gdzie przez C oznaczono całkowitą pojemność wejściową przedwzmacniacza ładunkowego widzianą od strony detektora ($C = C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f$).

Standardowo szumy wzmacniaczy w formie dyskretnej parametryzuje się zakładając, że zarówno szum napięciowy jak i szum prądowy są szumami tylko białymi, a ich gęstości widmowe oznaczają się następująco:

$$\frac{d \langle v_N^2 \rangle}{df} = v_{eqi}^2 = a , \quad (2.63)$$

$$\frac{d \langle i_N^2 \rangle}{df} = i_{det}^2 = b . \quad (2.64)$$

Przy założeniu takich szumów wzór 2.62 można przepisać do postaci:

$$\frac{d \langle v_{out}^2 \rangle}{df} = A^2 \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right) . \quad (2.65)$$

Ze wzoru 2.65 wynika, że napięciowe szumy białe przenoszą się na wyjście układu bez zmian. Prądowe szumy białe na wejściu układu przenoszą się na jego wyjście odwrotnie proporcjonalnie do kwadratu częstotliwości i pojemności sprzężenia zwrotnego przedwzmacniacza.

2.3. Filtracja i kształtowanie sygnału

Zgodnie z ideą odczytu przedstawioną na początku rozdziału 2, sygnał po przejściu przez przedwzmacniacz przechodzi przez układ kształtujący. Jest on filtrem pasmowym o biegunach rzeczywistych bądź zespolonych. Ma on w układzie dwojaki zadanie. Po pierwsze ma kształtować sygnał celem jego późniejszej rejestracji. Kształty impulsów mogą być bardzo różne. Drugim zadaniem tej części układu jest filtracja szumów. Polega ona na tym, że filtr obcina pasmo przenoszenia tak, aby cały układ przynosił przede wszystkim częstotliwości sygnału użytecznego. Dobierając odpowiedni filtr i jego parametry możemy znaleźć taki sposób kształtowania, aby stosunek sygnału do szumów (określony poniżej) był maksymalny. W ogólnym przypadku gęstość widmowa mocy szumów na wyjściu całego toru odczytu, zgodnie z wyrażeniem 1.4 dana jest wzorem:

$$\frac{d\langle v_{N\ out}^2 \rangle}{df} = \frac{d\langle v_{N\ pr}^2 \rangle}{df} \cdot |H(j\omega)|^2, \quad (2.66)$$

gdzie:

$\frac{d\langle v_{N\ pr}^2 \rangle}{df}$ jest gęstością widmową mocy szumów na wyjściu przedwzmacniacza,

wyliczoną dla trzech rodzajów szumów w punkcie 2.2.1

$H(j\omega)$ jest funkcją przenoszenia filtra

Zatem parametr σ_{noise} , zdefiniowany na początku rozdziału 1, będący pierwiastkiem z wariancji będzie dana ogólnym wzorem:

$$\sigma_{noise} = \sqrt{\int_0^{+\infty} \frac{d\langle v_{N\ pr}^2 \rangle}{d\omega} \cdot |H(j\omega)|^2 d\omega}. \quad (2.67)$$

Optymalizowana wielkość SNR przyjmie postać:

$$SNR = \frac{V_{out}^{max}}{\sigma_{noise}}, \quad (2.68)$$

gdzie V_{out}^{max} jest amplitudą sygnału wyjściowego.

Innym parametrem, który można optymalizować jest ekwiwalentny ładunek szumowy ENC (ang. *equivalent noise charge*). Definicja określa go jako taki ładunek wyrażony w elektronach, który wprowadzony na wejście układu w postaci prądowego impulsu diracowskiego da na wyjściu odpowiedź napięciową o amplitudzie równej σ_{noise} . Można zapisać, że:

$$ENC = \frac{\sigma_{noise}}{\frac{V_{out}^{max}}{N_{e-h}}}. \quad (2.69)$$

Do dalszych obliczeń potrzebne jest jeszcze wprowadzenie transformaty Fouriera. Bez wdawania się w szczegóły dotyczące warunków jakie muszą spełniać transformowane funkcje można napisać że transformata Fouriera funkcji $f(t)$ wynosi:

$$F(j\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\omega t} dt, \quad (2.70)$$

a odwrotna transformata Fouriera funkcji $F(j\omega)$ wynosi:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(j\omega)e^{j\omega t} d\omega. \quad (2.71)$$

2.3.1. Dopasowany filtr optymalny

Proces filtracji sygnału i optymalizacji stosunku sygnału do szumów można traktować w sposób niezależny od kształtu impulsu wejściowego. Na tej podstawie da się wyliczyć teoretyczną transmitancję takiego filtra, dla którego SNR jest maksymalne. Przedstawione to zostało poniżej [3][11]. Jak się później przekonamy filtr taki jest nierealizowalny w praktyce, jednak jego analiza pozwala zgłębić istotę filtracji.

Sygnał wejściowy toru odczytu dany jest w postaci przebiegu czasowego $Q_{in}V_{in}(t)$ z określonym rozkładem widmowym $Q_{in}V_{in}(j\omega)$, będącym transformatą Fouriera funkcji $Q_{in}V_{in}(t)$. Zakładamy dowolny szum stowarzyszony z sygnałem. Jednostronna gęstość widmowa mocy szumów będzie funkcją wyrażoną wzorem:

$$\frac{d\langle v_{N_{in}}^2 \rangle}{df} = N(\omega) \quad (2.72)$$

Zakładamy następnie, że transmitancja rozpatrywanego filtra dana jest funkcją $H(j\omega)$. Sygnał wyjściowy zgodnie z odwrotną transformatą Fouriera będzie dany formułą:

$$V_{out}(t) = \frac{Q_{in}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega t} d\omega . \quad (2.73)$$

Oznaczmy jako T_{max} czas, po którym na wyjściu układu zaobserwujemy maksimum sygnału. Wówczas otrzymamy wyrażenie na maksymalną wartość obserwowanego sygnału:

$$V_{out}(T_{max}) = V_{out}^{max} = \frac{Q_{in}}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega T_{max}} d\omega . \quad (2.74)$$

Gęstość widmową mocy szumów na wyjściu, zgodnie z 1.4 można zapisać w postaci:

$$\frac{d\langle v_{N_{out}}^2 \rangle}{df} = N(\omega) |H(j\omega)|^2 . \quad (2.75)$$

Całkując powyższy wzór możemy wyliczyć średniokwadratową wartość napięcia szumów na wyjściu układu:

$$\langle v_{N_{out}}^2 \rangle = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega . \quad (2.76)$$

Ponieważ obie funkcje w powyższym równaniu są parzyste a funkcja gęstości widmowej mocy szumów jest funkcją jednostronną poszerzono tu granicę całkowania do minus nieskończoności dzieląc wynik całkowania przez dwa. Możemy teraz podać formułę na stosunek sygnału do szumu zdefiniowany wzorem 2.68. Celem uproszczenia dalszych obliczeń optymalizować będziemy kwadrat tego stosunku.

$$SNR^2 = \frac{(V_{out}^{max})^2}{\langle v_{N_{out}}^2 \rangle} = \frac{Q_{in}^2 \left[\int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(j\omega)H(j\omega)e^{j\omega T_{max}} d\omega \right]^2}{\pi \int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega} \quad (2.77)$$

Aby dokonać maksymalizacji powyższego równania korzystamy z nierówności Schwarza, która w ogólnym przypadku wygląda następująco:

$$\left| \int_{-\infty}^{+\infty} u_1(\omega) \cdot u_2(\omega) d\omega \right|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} |u_1(\omega)|^2 d\omega \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} |u_2(\omega)|^2 d\omega \quad (2.78)$$

Nierówność ta przechodzi w równość gdy:

$$u_1(\omega) = L u_2^*(\omega) , \quad (2.79)$$

gdzie L jest dowolną stałą, a znak „ $*$ ” oznacza sprzężenie. Przyjmując, że:

$$u_1(\omega) = H(j\omega) \sqrt{N(\omega)} \quad \text{oraz} \quad u_2(\omega) = \frac{V_{in}(j\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} \cdot e^{j\omega T_{max}} \quad (2.80)$$

otrzymujemy:

$$\frac{\left[\int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(j\omega) H(j\omega) e^{j\omega T_{max}} d\omega \right]^2}{\int_{-\infty}^{+\infty} N(\omega) |H(j\omega)|^2 d\omega} \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V_{in}(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega . \quad (2.81)$$

Naszym zadaniem jest maksymalizacja SNR . Porównując wzory 2.77 i 2.81 widzimy, że maksymalny stosunek sygnału do szumów osiągniemy, gdy relacja ta będzie równością, a więc SNR^2 będzie wynosiło:

$$SNR^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V_{in}(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega . \quad (2.82)$$

Z warunku 2.79 na to aby nierówność Schwarza przeszła w równość otrzymujemy:

$$H(j\omega) \sqrt{N(\omega)} = L \cdot \frac{V_{in}^*(j\omega)}{\sqrt{N(\omega)}} e^{-j\omega T_{max}} . \quad (2.83)$$

Z powyższego wzoru wynika, że funkcja przenoszenia optymalnego filtra musi spełniać relację:

$$H(j\omega) = L \cdot \frac{V_{in}^*(j\omega)}{N(\omega)} e^{-j\omega T_{max}} . \quad (2.84)$$

Aby wynik stał się bardziej czytelny możemy przyjąć, że szum jest jedynie szumem białym opisanym rozkładem gęstości widmowej:

$$\frac{d \langle v_{Nin}^2 \rangle}{df} = W . \quad (2.85)$$

Wówczas wyrażenie opisujące filtr optymalny przyjmuje postać:

$$H_{opt}(j\omega) = \frac{L}{W} \cdot V_{in}^*(j\omega) e^{-j\omega T_{max}} . \quad (2.86)$$

Stosując do powyższego wyrażenia odwrotną transformatę Fouriera otrzymamy charakterystykę impulsową optymalnego filtra dopasowanego:

$$F_{opt}(t) = \frac{L}{2\pi W} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}^*(j\omega) e^{-j\omega(T_{max}-t)} d\omega . \quad (2.87)$$

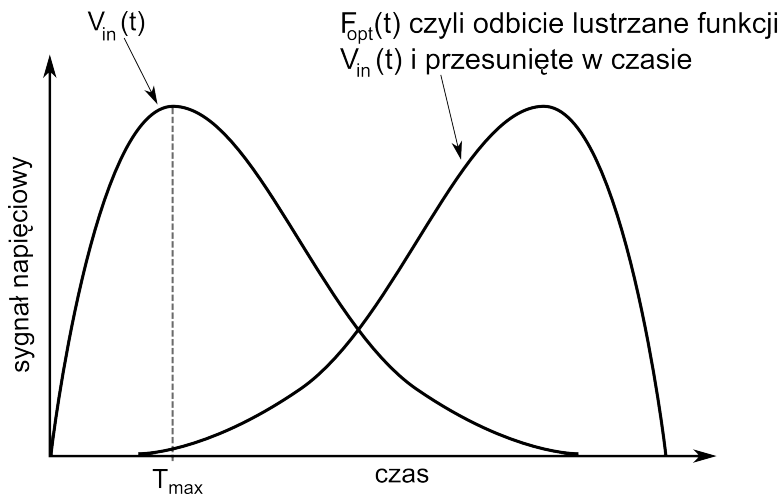
Celem zlikwidowania sprzężenia funkcji sygnału wejściowego, oraz mając na uwadze, że $V_{in}^*(j\omega) = V_{in}(-j\omega)$, podstawiamy nową zmienną $\bar{\omega} = -\omega$. Charakterystyka impulsowa przyjmuje postać:

$$F_{opt}(t) = -\frac{L}{2\pi W} \int_{-\infty}^{+\infty} V_{in}(j\bar{\omega}) e^{j\bar{\omega}(T_{max}-t)} d\bar{\omega} . \quad (2.88)$$

Wyrażenie podcałkowe jest transformatą Fouriera funkcji $V_{in}(T_{max} - t)$, zatem:

$$F_{opt}(t) = const \cdot V_{in}(T_{max} - t) . \quad (2.89)$$

Zależność ta oznacza, że impulsowa charakterystyka dopasowanego filtra optymalnego jest lustrzanym odbiciem czasowego przebiegu sygnału wejściowego, przesuniętym o zdefiniowany wyżej czas T_{max} . Przykład takiego przebiegu dla typowego sygnału $V_{in}(t)$ przedstawiony jest na rysunku 2.22.

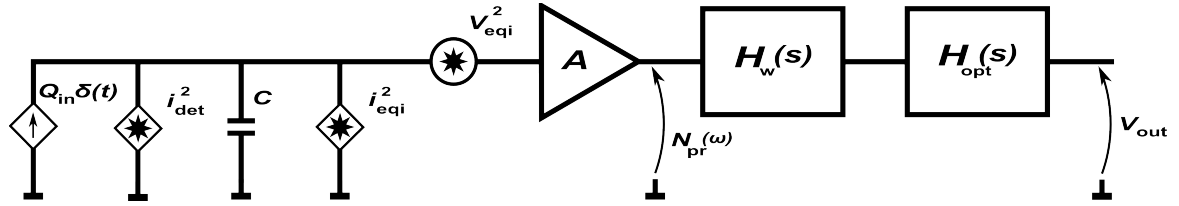


Rysunek 2.22. Przykładowy sygnał wejściowy i odpowiedź filtra optymalnego (jednostki względne)

Filtr optymalny jest nierealizowalny fizycznie z kilku zasadniczych powodów. Po pierwsze na etapie projektowania elektroniki nie znamy precyzyjnie przebiegu czasowego sygnału wejściowego. Po drugie, aby wykorzystać całą dostępną energię, jaką niesie ze sobą sygnał z detektora teoretycznie potrzeba nieskończonego czasu pomiaru. Często mamy jednak do czynienia z układami, które mają pracować szybko, co uniemożliwia przedłużenie czasu pomiaru do wartości, przy których można by choć przybliżyć się do właściwości filtra optymalnego. Kolejną kwestią są tu ograniczenia wynikające z

małej ilości dostępnego miejsca na układach wysokiej skali integracji, co uniemożliwia budowanie skomplikowanych układów pobierających duże ilości mocy. Należy podkreślić również, że wnioski po przyjęciu założenia 2.85 uzyskane zostały przyjmując tylko szum biały. Wprowadzenie do obliczeń szumów typu $\frac{1}{f}$ komplikuje obliczenia, nie pozwalając przedstawić wniosków w prosty, analityczny sposób.

Ponieważ filtr optymalny da się dobrze opisać tylko dla szumów białych można korzystając z powyższych wyprowadzeń obliczyć przypadek układu z zastosowanym filtrem wybielającym. Schemat układu z prefiltrem wybielającym przedstawia rysunek 2.23.



Rysunek 2.23. Schemat filtru optymalnego z prefiltrem wybielającym szumy

Na schemacie tym detektor zasymulowany został jako źródło prądowe dające impulsy w postaci delty Diraca $Q_{in}\delta(t)$. Ponadto przyjęto tu, że impedancja wejściowa przedwzmacniacza oznaczonego na schemacie literą A , opisującą jego wzmocnienie jest impedancją wyłącznie pojemnościową. Pojemność C opisuje połączenie równoległe pojemności detektora oraz impedancji wejściowej przedwzmacniacza ($C = C_d + C_{in}$). Na schemacie pokazano również dwa filtry, z których pierwszy, oznaczony $H_w(s)$ jest filtrem wybielającym, a drugi, oznaczony $H_{opt}(s)$ jest idealnym filtrem dopasowanym. Zastosowanie filtra wybielającego ma tu swoje uzasadnienie. Źródła szumowe, oznaczone na schemacie przez v_{eqi}^2 oraz i_{det}^2 , o stałych jednostronnych gęstościach widmowych określonych odpowiednio wzorami:

$$\frac{d\langle v_{N_{eqi}}^2 \rangle}{df} = v_{eqi}^2 = a, \quad (2.90)$$

$$\frac{d\langle i_{N_{det}}^2 \rangle}{df} = i_{det}^2 = b, \quad (2.91)$$

na wyjście przedwzmacniacza przenoszą się zgodnie z zależnością 2.65 wyprowadzoną w podrozdziale 2.2.1. W efekcie otrzymujemy szum określony gęstością widmową mocy:

$$N_{pr}^2(\omega) = \frac{d\langle v_{N_{in}}^2 \rangle}{df} = A^2 \left(\frac{d\langle v_{N_{eqi}}^2 \rangle}{df} + \frac{d\langle i_{N_{det}}^2 \rangle}{df} |Z_{in}(j\omega)|^2 \right) = A^2 \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right). \quad (2.92)$$

Przez $Z_{in}(j\omega) = \frac{1}{j\omega C}$ oznaczono tu impedancję widzianą przez szumowe źródło prądowe. Widzimy zatem, że na wejściu systemu filtrującego (na wyjściu przedwzmacniacza) dostajemy szum będący złożeniem szumu białego i szumu czerwonego (proporcjonalnego do $\frac{1}{f^2}$). Aby można było zastosować podany wcześniej wzór 2.86 na SNR dla filtru optymalnego trzeba zapewnić, aby szum na wyjściu filtru $H_w(s)$, a zarazem na wejściu filtru $H_{opt}(s)$ był szumem białym. Pierwiastek modułu transmitancji filtru wybielającego musi spełniać warunek:

$$|H_w(\omega)| = \sqrt{\frac{W}{N_{pr}^2(\omega)}} = \sqrt{\frac{W}{A^2 \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2}\right)}} = \sqrt{\frac{WC^2 \omega^2}{A^2 (aC^2 \omega^2 + b)}}. \quad (2.93)$$

W oznacza tu gęstość widmową szumów białych uzyskaną na wyjściu filtru wybielającego. Można zauważyć, że równanie 2.93 jest modulem transmitancji układu różniczkującego CR, który opisany jest ogólnym wzorem:

$$H_w(s) = \frac{sL_1}{sL_2 + L_3}, \quad (2.94)$$

ze stałą czasową:

$$\tau = C \sqrt{\frac{L_2}{L_3}}. \quad (2.95)$$

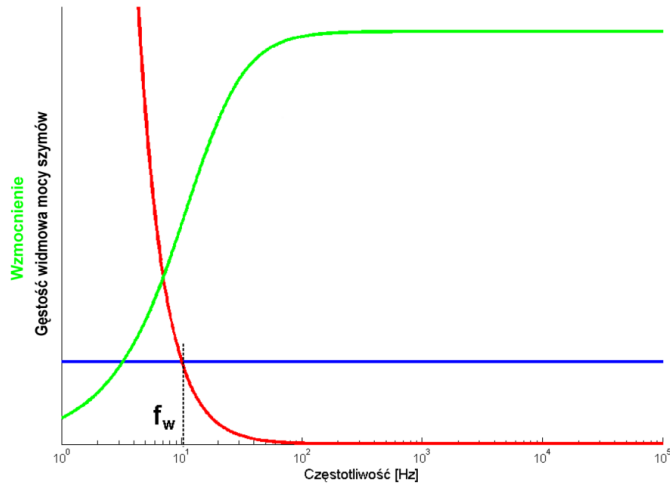
Licząc pierwiastek z modułu równania 2.94 i porównując go do równania 2.93 można napisać wzór na transmitancję filtru wybielającego:

$$H_w(s) = \frac{sC\sqrt{W}}{A(sC\sqrt{a} + \sqrt{b})}, \quad (2.96)$$

oraz jego stałą czasową:

$$\tau_w = C \sqrt{\frac{a}{b}}. \quad (2.97)$$

Odwrotność powyższej stałej czasowej wyznacza wartość częstotliwości kątovej ω_w , dla której obydwie składowe szumu $N_{pr}(\omega)$ (składowe sumy we wzorze 2.92) są sobie równe. Poglądowo pokazuje to rysunek 2.24. Widzimy na nim gęstość widmową szumów typu $\frac{1}{f^2}$, gęstość widmową szumu białego oraz pasmo przenoszenia filtru różniczkującego o częstotliwości odcięcia $f_w = \frac{\omega_w}{2\pi}$.



Rysunek 2.24. Poglądowa zależność częstotliwościowa szumów białych (kolor niebieski) oraz szumów czerwonych (kolor czerwony). Kolorem zielonym zaznaczono pasmo przenoszenia filtra wybielającego (jednostki względne)

Przy założeniu, że układ wybielający nie jest źródłem dodatkowych szumów można stwierdzić, że podanie szumu opisanego wzorem 2.92 na filtr spełniający zależność 2.96 daje na wyjściu takiego filtra szum biały o gęstości widmowej równej:

$$\frac{d \langle v_{Nin}^2 \rangle}{df} = W . \quad (2.98)$$

Odpowiedzią na prądowy impuls Diraca idealnego przedwzmacniacza ładunkowego jest skok napięcia proporcjonalny do niesionego przez ten impuls ładunku. Przebieg tego impulsu można opisać w postaci wzoru:

$$V_{pr}(t) = A \frac{Q_{in}}{C} h(t) , \quad (2.99)$$

gdzie $h(t)$ jest funkcją Heaviside'a. Wprowadzenie filtra wybielającego powoduje eksponencjalny zanik tego impulsu zgodnie ze stałą czasową τ_w . W reprezentacji operatorowej impuls ten będzie opisany wzorem:

$$V_w(s) = A \frac{Q_{in}}{sC} \frac{sC\sqrt{W}}{A(sC\sqrt{a} + \sqrt{b})} . \quad (2.100)$$

Dokonanie operacji odwrotnej transformaty Laplace'a daje czasową zależność impulsu opisaną wzorem:

$$V_w(t) = \frac{Q_{in}}{C} \sqrt{\frac{W}{a}} e^{-\frac{t}{\tau_w}} h(t) , \quad (2.101)$$

gdzie τ_w opisane jest wzorem 2.97. Korzystając ze wzoru 2.82 możemy obliczyć stosunek sygnału do szumu dla filtra optymalnego przy założeniu, że na jego wejście

podawany jest sygnał opisany transformatą Fouriera formuły 2.101, a szum biały opisany jest wzorem 2.98:

$$\begin{aligned} SNR^2 &= \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{|V_w(j\omega)|^2}{N(\omega)} d\omega = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\left| \frac{Q_{in}\sqrt{W}}{(j\omega C\sqrt{a+\sqrt{b}})} \right|^2}{W} d\omega = \\ &= Q_{in}^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{\omega^2 C^2 a + b} d\omega = \frac{Q_{in}^2}{C} \frac{1}{\sqrt{ab}} \end{aligned} \quad (2.102)$$

Zatem optymalny stosunek sygnału do szumu układu z zastosowaniem prefiltru wybielającego jest opisany zależnością:

$$SNR = \frac{Q_{in}}{\sqrt{C}} \frac{1}{\sqrt[4]{ab}}. \quad (2.103)$$

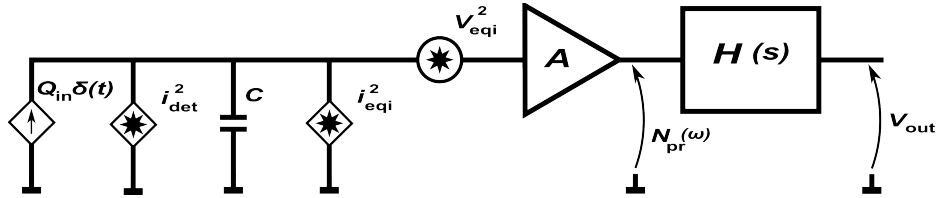
Korzystając ze wzorów 2.68 oraz 2.69 można od razu podać wyrażenie na ekwiwalentny ładunek szumowy dla filtru optymalnego:

$$ENC = \sqrt{C} \sqrt[4]{ab}. \quad (2.104)$$

Analizując ten wzór można podać kilka istotnych wniosków. Po pierwsze widzimy, że zastosowanie filtru wybielającego w tej analizie nie wpływa na wartość stosunku sygnału do szumu. Zależy on nadal tylko od szumów podawanych na wejście całego układu, a opisanych wzorami 2.90 i 2.91. Po drugie stosunek ten zależy od całkowitej pojemności widzianej od strony detektora. Z tego względu przy budowie układów detekcyjnych należy skupić się zarówno na minimalizacji szumów jak i na minimalizacji pojemności detektora oraz pojemności wejściowych przedwzmacniacza. Właśnie ze względu na minimalizację tych pojemności elektronika *front - end* standardowo znajduje się w bezpośredniej bliskości detektora. Jak pokazała analiza generacji ładunków w idealnym detektorze półprzewodnikowym, w rozdziale 2.1.4, czas zbierania ładunków jest nieskończony. Zatem maksymalny stosunek sygnału do szumu dla filtru optymalnego otrzymamy dla nieskończonego czasu pomiaru, gdyż dopiero wtedy można mieć pewność, że cały ładunek wygenerowany w detektorze został zebrany. Interesujące jest tu również, że warunki, jakie zostały narzucone na funkcję przenoszenia (wzór 2.89 i wnioski z niego płynące) nie zmieniły się po wprowadzeniu filtru wybielającego i nadal obowiązują. Wprowadzenie filtru wybielającego pozwoliło podać jedynie analityczną formułę na stosunek sygnału do szumu, który zostanie wykorzystany w następnym rozdziale do porównania różnych praktycznych rozwiązań filtrów.

2.3.2. Różne techniki filtracji

Ponieważ filtr idealny jest nierealizowalny fizycznie, wykorzystuje się różne techniki filtracji. Poniżej przedstawiono założenia i przykładowe realizacje wybranych filtrów, opisanych na schemacie 2.25 funkcją przenoszenia $H(s)$.



Rysunek 2.25. Schemat układu z wyodrębnioną częścią detektora, przedwzmacniacza oraz filtru

Oznaczenia na powyższym rysunku odpowiadają oznaczeniom na rysunku 2.23. Analogicznie do wzoru 2.92 można podać formułę na gęstość widmową mocy szumów na wyjściu przedwzmacniacza:

$$N_{pr}^2(\omega) = \frac{d\langle v_{N_{pr}}^2 \rangle}{df} = A^2 \left(\frac{d\langle i_{N_{det}}^2 \rangle}{df} |Z_{in}(\omega)|^2 + \frac{d\langle v_{N_{eqi}}^2 \rangle}{df} \right) = A^2 \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right). \quad (2.105)$$

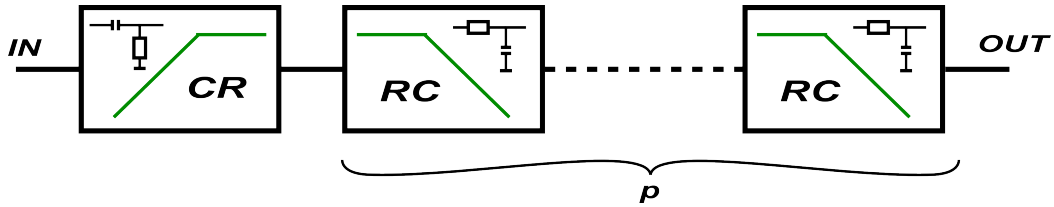
Przyjmując, że odpowiedzią na prądowy impuls Diraca idealnego wzmacniacza jest skok napięcia proporcjonalny do niesionego przez ten impuls ładunku można podać formułę na stosunek sygnału do szumu dla dowolnego filtru o transmitancji $H(s)$:

$$SNR = \frac{\max \left(\mathcal{L}^{-1} \left[\frac{A Q_{in}}{sC} H(s) \right] \right)}{\sqrt{\frac{1}{4\pi} A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right) \cdot |H(s)|^2 d\omega}}. \quad (2.106)$$

W liczniku mamy tu maksymalną amplitudę sygnału wyjściowego liczoną jako maksimum z odwrotnej transformacji Laplace'a ze skoku napięcia podanego na filtr $H(s)$. W mianowniku natomiast mamy pierwiastek z wartości średniokwadratowej szumów w tym samym punkcie. Ponieważ gęstości widmowe mocy szumów a i b przyjęto podawać jako jednostronne to całka od minus do plus nieskończoności w mianowniku równania 2.106 podzielona została przez dwa. Stosunek tych dwóch wielkości wyznacza stosunek sygnału do szumu zdefiniowany w podpunkcie 2.3.

Filtry typu CR – (RC)^p

Jednymi z najczęściej stosowanych filtrów są tak zwane filtry pseudogaussowskie typu CR – (RC)^p. Schematycznie budowa takiego filtru sprowadza się do układu przedstawionego na rysunku 2.26.



Rysunek 2.26. Schemat blokowy filtru typu $CR - (RC)^p$

Filtr ten składa się z różniczkującego członu CR , odcinającego dolne pasmo częstotliwości, oraz z szeregowo połączonych całkujących członów RC , co w efekcie daje filtr pasmowy o $p + 1$ biegunach. Przy takich samych stałych czasowych wszystkich członów pasmo przenoszenia takiego filtru opisuje formuła:

$$H(s) = \frac{s\tau}{1 + s\tau} \left(\frac{1}{1 + s\tau} \right)^p, \quad (2.107)$$

gdzie:

τ – stała czasowa filtru

p – rząd filtru będący liczbą członów całkujących RC

Dla tego typu filtru można podać analityczną formułę na przebieg czasowy odpowiedzi na skok napięcia wejściowego $\frac{AQ_{in}}{C}$:

$$h(t) = \frac{AQ_{in}}{C} \frac{1}{p!} \left(\frac{t}{\tau} \right)^p e^{-\frac{t}{\tau}}, \quad (2.108)$$

przyjmujący maksimum zawsze w czasie równym $T_{max} = p \cdot \tau$. Czas ten, czyli czas dochodzenia impulsu do swojego maksimum nazywany jest w elektronice *peaking time*. Amplituda w tym punkcie wyraża się wzorem:

$$V_{out}^{max} = \frac{AQ_{in}}{C} \frac{p^p}{p! e^p}. \quad (2.109)$$

Dla takiego filtru można policzyć wartość średniokwadratową szumów na wyjściu układu 2.25. Wartość ta wyraża się wzorem w mianowniku równania 2.106. Można w sposób analityczny policzyć tę całkę:

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{4\pi} A^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right) \cdot \left| \frac{\omega\tau}{1 + \omega\tau} \left(\frac{1}{1 + \omega\tau} \right)^p \right|^2 d\omega} \\ &= \sqrt{A^2 \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{8\sqrt{\pi} p!} \left(\frac{a}{\tau} + \frac{b(2p - 1)\tau}{C^2} \right)} \end{aligned} \quad (2.110)$$

$\Gamma(p - \frac{1}{2})$ jest tu gammą Eulera wyrażenia $p - \frac{1}{2}$.

Korzystając ze wzoru 2.106 oraz 2.109 i 2.110 można otrzymać stosunek sygnału do szumu:

$$\begin{aligned}
 SNR &= \frac{\frac{AQ_{in}}{C} \frac{p^p}{p!e^p}}{\sqrt{\frac{1}{2\pi} \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{8\sqrt{\pi}p!} \left(\frac{a}{\tau} + \frac{b(2p-1)\tau}{C^2} \right)}} = \\
 &= \frac{Q_{in} \frac{p^p}{p!e^p}}{\sqrt{\frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{16\sqrt{\pi}p!} \left(\frac{aC^2}{\tau} + b(2p-1)\tau \right)}} .
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

Przeprowadzając analizę powyższego wzoru można obliczyć stałą czasową, dla której stosunek sygnału do szumu jest maksymalny. Wyraża się ona wzorem:

$$\tau_{max} = \sqrt{\frac{a}{(2p-1)b}} C . \tag{2.112}$$

Zatem maksymalny stosunek sygnału do szumu wynosi:

$$SNR_{max} = \frac{2Q_{in} \frac{p^p}{p!e^p}}{\sqrt{\frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})C}{\sqrt{\pi}p!} \sqrt{(2p-1)ab}}} . \tag{2.113}$$

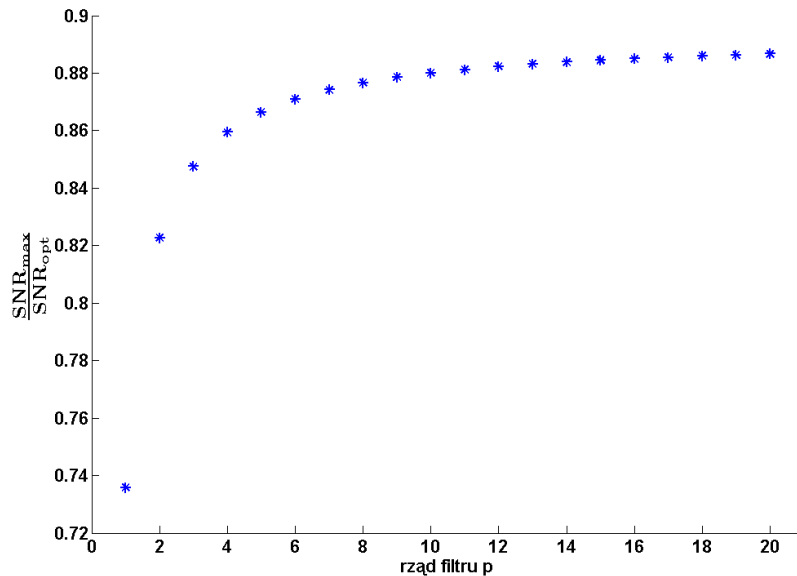
Korzystając ze wzoru 2.69 można podać wartość na minimalny ekwiwalentny ładunek szumowy:

$$ENC_{min} = \frac{p!e^p}{2p^p} \sqrt{\frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})C}{\sqrt{\pi}p!} \sqrt{(2p-1)ab}} . \tag{2.114}$$

Aby pokazać w jaki sposób korespondują ze sobą filtry typu $CR - (RC)^p$ i filtr optymalny warto pokazać o ile zmniejsza się tu będzie stosunek sygnału do szumu. Wzór 2.113 można przepisać do postaci:

$$\begin{aligned}
 SNR_{max} &= \frac{2p^p}{p!e^p} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}p!}{\Gamma(p - \frac{1}{2})\sqrt{(2p-1)}}} \frac{Q_{in}}{\sqrt{C^4 ab}} = \\
 &= \frac{2p^p}{p!e^p} \sqrt{\frac{\sqrt{\pi}p!}{\Gamma(p - \frac{1}{2})\sqrt{(2p-1)}}} SNR_{opt}
 \end{aligned} . \tag{2.115}$$

Na wykresie 2.27 przedstawiono wartości współczynnika stojącego przy SNR_{opt} we wzorze powyżej. Widać wyraźnie, że wraz ze wzrostem rzędu filtra wartość tego współczynnika rośnie aby w nieskończoności osiągnąć wartość 0,893. Filtr typu $CR - (RC)^p$ dla $p \rightarrow \infty$ staje się filtrem gaussowskim.

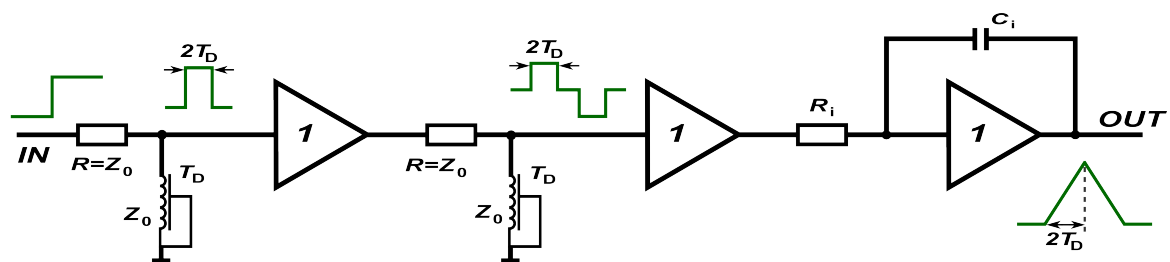


Rysunek 2.27. Stosunek sygnału do szumu w odniesieniu do stosunku sygnału do szumu dla filtru optymalnego

Jak widać, dla filtru typu $CR-(RC)^p$ można przeprowadzić kompletne analityczne obliczenia. Jak później pokaże analiza innych technik filtracji nie zawsze będzie to możliwe.

Filtr trójkątny

Filtracja trójkątna, nazywana tak ze względu na kształt impulsu wyjściowego, jest kolejnym ważnym sposobem kształtowania sygnału. Idea działania polega na uformowaniu ze skoku napięcia podawanego na wejście układu impulsu napięciowego o skończonym czasie trwania, a następnie jego przecałkowaniu. Schematycznie pokazano to na rysunku 2.28 przedstawiającym przykład realizacji takiego filtru.



Rysunek 2.28. Przykład realizacji filtru trójkątnego

Funkcja przenoszenia takiego filtru ma postać:

$$H(s) = \frac{1}{sC_iR_i} (1 - e^{-sT_D})^2. \quad (2.116)$$

Zaletą tego typu układu jest skończony czas trwania impulsu, co pozwala na budowanie szybkich układów. Niestety w rozwiązaniu tym wykorzystywana jest linia długa,

co powoduje ogromne trudności w realizacji tego pomysłu w elektronice wysokiej skali integracji.

Analogicznie do poprzednich rozważań można tu policzyć stosunek sygnału do szumu. Aby tego dokonać musimy obliczyć całkę w mianowniku formuły 2.106. W celu uproszczenia obliczeń przyjmuje się tu, że stała czasowa całkowania odpowiada czasowi opóźnienia linii długiej. Zatem we wzorze 2.116 $C_i R_i = T_D$.

$$\begin{aligned} \sigma &= \sqrt{\frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right) \cdot \left| \frac{1}{j\omega T_D} (1 - e^{-j\omega T_D}) \right|^2 d\omega} = \\ &= \sqrt{\frac{4}{\pi} \cdot \int_0^{+\infty} \left(a + \frac{b}{\omega^2 C^2} \right) \frac{\sin^4\left(\frac{\omega T_D}{2}\right)}{\omega^2 T_D^2} d\omega} = \sqrt{\left(2 \frac{a}{T_D} + \frac{2}{3} \frac{b T_D}{C^2} \right)} \end{aligned} \quad (2.117)$$

Maksimum odpowiedzi na skok napięcia przypada na $t = T_D$ zatem amplituda w tym momencie czasowym wynosi:

$$V_{out}^{max} = \frac{A Q_{in}}{C} . \quad (2.118)$$

Stosunek sygnału do szumu obliczony przy pomocy wzoru 2.106 oraz wzorów 2.117 i 2.118 to:

$$SNR = \frac{\frac{A Q_{in}}{C}}{A \sqrt{\frac{1}{2\pi} \pi \left(4 \frac{a}{T_D} + \frac{4}{3} \frac{b T_D}{C^2} \right)}} = \frac{Q_{in}}{\sqrt{2 \frac{a C^2}{T_D} + \frac{2}{3} b T_D}} . \quad (2.119)$$

Znajdujemy optymalną stałą czasową T_D^{max} :

$$T_D^{max} = \sqrt{\frac{3a}{b}} C , \quad (2.120)$$

oraz maksymalny stosunek sygnału do szumu przy tej stałej czasowej:

$$SNR_{max} = \frac{Q_{in}}{2\sqrt{C} \sqrt[4]{\frac{ab}{3}}} . \quad (2.121)$$

Korzystając ze wzoru 2.69 można podać wzór na minimalny ekwiwalentny ładunek szumowy filtru trójkątnego:

$$ENC_{min} = 2\sqrt{C} \sqrt[4]{\frac{ab}{3}} . \quad (2.122)$$

Analogicznie do obliczeń dla filtru $CR - (RC)^p$ można podać formułę na stosunek sygnału do szumu w odniesieniu do filtru optymalnego:

$$SNR_{max} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} \frac{Q_{in}}{\sqrt{C}\sqrt[4]{ab}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{2} SNR_{opt} . \quad (2.123)$$

Podobnie jak poprzednio istnieje tu analityczne rozwiązanie.

Filtry o biegunach zespolonych

Kolejną ważną i ciekawą technikę filtracji stanowią filtry o biegunach zespolonych. Koncepcja tego typu filtrów wywodzi się wprost z definicji filtru pseudogaussowskiego. Zakłada ona, że idealna funkcja czasowa $V_{out}(t)$ odpowiedzi filtru na wymuszenie jednostkowym skokiem napięcia powinna być dana w postaci przebiegu normalnego:

$$V_{out}(t) = a_0 e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} , \quad (2.124)$$

gdzie σ jest tu odchyleniem standardowym tego przebiegu i stanowi odzwierciedlenie stałej czasowej filtru. Normalizując powyższy przebieg do jedności w efekcie otrzymujemy znormalizowaną funkcję odpowiedzi filtru na jednostkowy skok napięcia:

$$V_{out}(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}} . \quad (2.125)$$

Transformata Fouriera tego przebiegu przyjmuje postać:

$$V_{out}(j\omega) = e^{\frac{1}{2}\sigma^2\omega^2} . \quad (2.126)$$

Zatem jednostkowy skok napięcia po przejściu przez filtr o transmitancji $H(s)$ powinien dać na wyjściu sygnał o rozkładzie widmowym określonym wzorem 2.126. Załóżmy, że funkcja przenoszenia posiada same bieguny. Zatem może ona być zapisana w postaci:

$$H(s) = \frac{1}{Q(s)} , \quad \text{przy czym } s = j\omega, \quad (2.127)$$

gdzie $Q(s)$ jest wielomianem Hurwitza, tzn. wielomianem, którego współczynniki są liczbami nieujemnymi, a wszystkie rozwiązania charakteryzuje ujemna wartość części rzeczywistej. Rozwiązanie równania $Q(s) = 0$ daje nam bieguny funkcji przenoszenia. Aby zapewnić by wszystkie bieguny zespolone były parami sprzężone wprowadzamy dodatkowy warunek:

$$H(j\omega) \cdot H(-j\omega) = [V_{out}(\omega)]^2 . \quad (2.128)$$

Wyrażenie to nie jest od razu zrozumiałe. Jego wyjaśnienie przedstawiono w pracy [7]. W ogólności jego poprawność można wytłumaczyć tym, że ze względu na brak części fazowej transformaty Fouriera impulsu wyjściowego (opisanego wzorem 2.126) funkcja przenoszenia filtru odpowiada jego impulsowi wyjściowemu. Stosując ten związek do wyrażenia 2.126 i 2.127 można zapisać, że wielomian Hurwitza spełnia równanie:

$$Q(s) \cdot Q(-s) = e^{-\sigma^2 s^2} . \quad (2.129)$$

Wstawiając nową przeskalowaną zmienną $p = \sigma s$ dochodzimy do równania:

$$Q(p) \cdot Q(-p) = e^{-p^2} . \quad (2.130)$$

Rozwijamy daną funkcję w szereg Taylora i otrzymujemy:

$$Q(p) \cdot Q(-p) = 1 - p^2 + \frac{p^4}{2!} - \frac{p^6}{3!} + \dots + (-1)^n \cdot \frac{p^{2n}}{n!} , \quad (2.131)$$

gdzie $n = 0, 1, 2, \dots$ jest rzędem wielomianu oznaczającym liczbę biegunów. Analiza powyższego szeregu pokazuje, że dla parzystych rzędów funkcja przenoszenia będzie miała tylko bieguny zespolone, a dla nieparzystych obok biegunów zespolonych pojawi się jeden biegun rzeczywisty. Dla rzędu zerowego funkcja przenoszenia jest stała i ze względu na filtrację sygnału nie ma uzasadnienia. Znalezienie biegunów dla rzędu pierwszego i drugiego nie stanowi problemu i można tego dokonać analitycznie.

Dla $n = 1$ mamy:

$$Q(p) \cdot Q(-p) = 1 - p^2 = (1 + p)(1 - p) . \quad (2.132)$$

Z tego wynika, że $Q(p) = (1 + p)$, a funkcja przenoszenia ma jeden biegun rzeczywisty:

$$p = -1 . \quad (2.133)$$

Dla $n = 2$ mamy:

$$\begin{aligned} Q(p) \cdot Q(-p) &= 1 - p^2 + \frac{p^4}{2!} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}p + p^4} \right) \cdot \left(\sqrt{2} - \sqrt{2 + 2\sqrt{2}p + p^4} \right) . \end{aligned} \quad (2.134)$$

Zatem:

$$Q(p) = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(\sqrt{2} + \sqrt{2 + 2\sqrt{2}p + p^4} \right) . \quad (2.135)$$

Znajdując rozwiązania równania $Q(p) = 0$ otrzymujemy dwa bieguny zespolone sprzężone:

$$p = \frac{1}{2} \left(-\sqrt{2 + 2\sqrt{2}} \pm j\sqrt{2\sqrt{2} - 2} \right) . \quad (2.136)$$

Bieguny wyższych rzędów muszą być już obliczane numerycznie. W ogólności funkcja przenoszenia filtru dana jest wyrażeniem:

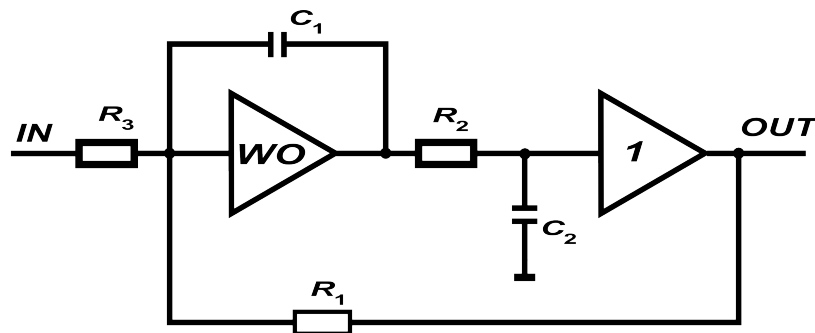
$$\left\{ \begin{array}{l} H(s) = \frac{\sigma s A_0 \prod_{i=1}^k (A_i^2 + W_i^2)}{(\sigma s + A_0) \prod_{i=1}^k ((\sigma s + A_i)^2 + W_i^2)} \quad \text{dla nieparzystego } n \\ H(s) = \frac{\prod_{i=1}^k (A_i^2 + W_i^2)}{\prod_{i=1}^k ((\sigma s + A_i)^2 + W_i^2)} \quad \text{dla parzystego } n \end{array} \right. , \quad (2.137)$$

gdzie A_0 oznacza biegun rzeczywisty, a A_i oraz W_i oznaczają rzeczywiste i urojone części i -tego bieguna. k oznacza tu liczbę par biegunów zespolonych. W tabeli 2.1 przedstawiono numerycznie obliczone wartości kilku biegunów wykorzystywane we wzorach na transmitancję filtru zespolonego.

Tabela 2.1. Numeryczne wartości biegunów dla kilku rzędów pierwszych rzędów wielomianu Hurwitza

	$n = 1$	$n = 2$	$n = 3$	$n = 4$	$n = 5$
A_0	1	–	1,26336	–	1,47668
A_1	–	1,09868	1,14909	1,35535	1,41666
W_1	–	0,45509	0,78641	0,32794	0,59785
A_2	–	–	–	1,18108	1,20368
W_2	–	–	–	1,06037	1,29948

Przykład realizacji takiego filtru przedstawiony został w pracy [7]. Jego schemat przedstawia rysunek 2.29.



Rysunek 2.29. Przykład realizacji filtru z biegunami zespolonymi

Przez „WO” oznaczono tu wzmacniacz operacyjny. Funkcja przenoszenia tego układu dana jest wyrażeniem:

$$H(s) = -\frac{R_1}{R_3} \frac{1}{(1 + sC_1R_1 + s^2C_1R_1C_2R_2)} . \quad (2.138)$$

Oznacza to, że w układzie tego typu mamy dwa bieguny zespolone sprzężone, wyrażające się wzorem:

$$s = \frac{1}{2C_2R_2} \left(-1 \pm j \sqrt{\frac{4C_2R_2}{C_1R_1} - 1} \right). \quad (2.139)$$

Łącząc więcej takich układów w szereg możemy otrzymać układ o dowolnej zadanej liczbie biegunów, przy czym aby uzyskać biegun rzeczywisty dla nieparzystego rzędu filtru należy dołączyć na wejściu układ różniczkujący. Filtr taki oprócz zera wprowadza również biegun rzeczywisty.

Celem ułatwienia zrozumienia dalszego tekstu, w dalszej części pracy przez rząd filtru zespolonego będzie rozumiana liczba biegunów pomniejszona o jeden, czyli członów całkujących funkcji przenoszenia, tak jak to było rozumiane dla filtrów o biegunach zespolonych. Dla przykładu przyjęcie takiej notacji oznacza, że układ z rysunku 2.29 opisany funkcją przenoszenia 2.138 jest filtrem zespolonym rzędu 1 ponieważ ma jeden biegun zespolony sprzężony opisany wzorem 2.139.

Dla filtrów z biegunami zespolonymi opisanymi powyżej nie jest możliwe znalezienie analitycznego wzoru na stosunek sygnału do szumu. Aby porównać taki filtr z innymi typami filtracji należy uciec się do obliczeń numerycznych. Zatem korzystając ze wzoru 2.106, oraz zakładając funkcję przenoszenia w postaci 2.137 obliczamy numerycznie całkę w mianowniku oraz maksimum impulsu po przejściu przez filtr.

2.3.3. Porównanie różnych technik filtracji

W tym podrozdziale przedstawiono porównanie stosunku sygnału do szumu dla różnych technik filtracji w odniesieniu do filtru optymalnego. Przedstawiono też wyniki obliczeń numerycznych dla filtru zespolonego.

W zbiorczej tabeli 2.2 poniżej przedstawiono wyniki obliczeń zarówno analitycznych jak i numerycznych, oraz ich porównanie z filtrem optymalnym. W obliczeniach tych założono pojemność wejściową $C = 1 \text{ pF}$. Jest to typowy rząd pojemności diody $p - n$ pracującej w reżimie detektora półprzewodnikowego. Parametry szumów napięciowych (a) i prądowych (b) zostały dobrane na podstawie dostarczonej przez firmę Analog Devices specyfikacji wzmacniacza AD8067, który będzie wykorzystywany w części praktycznej niniejszej pracy. Układ ten jest niskoszumnym wzmacniaczem operacyjnym o specyfikacji szumowej:

$$\begin{aligned} \sqrt{a} &= 6,6 \frac{nV}{\sqrt{Hz}} \\ \sqrt{b} &= 0,6 \frac{fA}{\sqrt{Hz}} \end{aligned} \quad (2.140)$$

Jako ładunek referencyjny podawany na wejście przedwzmacniacza przyjęto wartość $Q_{in} = 23000 \text{ e}$ ($Q_{in} \approx 4 \text{ fC}$), jako standardową wartość ładunku generowanego w detektorze o grubości $300 \mu m$ przez naładowaną relatywistyczną cząstkę jonizującą.

Dla filtrów zespolonych parametr σ , obrazujący odchylenie standardowe idealnego przebiegu gaussowskiego dobieramy numerycznie tak, aby *peaking time* impulsu wyjściowego z filtru o biegunach zespolonych danego rzędu zgadzał się z analogicznym czasem dla filtru typu $CR - (RC)^p$ odpowiedniego rzędu. Technika taka daje wgląd na czasy trwania impulsów. W tabeli zaznaczone zostały także czasy osiągnięcia przez impuls wyjściowy jednego procenta i jednego promila swojej amplitudy. Ponieważ nie istnieją analityczne wzory na stosunek sygnału do szumu dla filtrów zespolonych, zamiast kolumn pokazujących te wzory podano funkcje przenoszenia takiego filtru o zadanym rzędzie.

Tabela 2.2. Analityczne i numeryczne porównanie różnych technik filtracji przy zastosowaniu parametru SNR ($C = 1 \text{ pF}$, $\sqrt{a} = 6,6 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$, $\sqrt{b} = 0,6 \frac{fA}{\sqrt{Hz}}$, $Q_{in} = 23000 e$)

Filtr	Wzory analityczne		Obliczenia analityne		Obliczenia numeryczne			
	SNR	τ_{opt}	SNR_{max}	$\frac{SNR_{max}}{SNR_{max}^{opt}}$	$\frac{SNR_{max}}{SNR_{max}^{opt}}$	$T_{peak} [\mu s]$	$T_{1\%} [\mu s]$	$T_{0,1\%} [\mu s]$
Optymalny	$\frac{Q_{in}}{\sqrt{C}} \frac{1}{\sqrt[4]{ab}}$	∞	$\frac{Q_{in}}{\sqrt{C}} \frac{1}{\sqrt[4]{ab}}$	1	1	∞	–	–
$CR - RC$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^2}$	$\frac{Q_{in} \frac{1}{e}}{\sqrt{\frac{1}{8} \left(\frac{aC^2}{\tau} + b\tau \right)}}$	$\sqrt{\frac{a}{b}} C$	$\frac{Q_{in} \frac{2}{e}}{\sqrt{C} \sqrt[4]{ab}}$	0,74	0,74	11,00	84,02	112,56
$CR - (RC)^2$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^3}$	$\frac{Q_{in} \frac{2}{e}}{\sqrt{\frac{1}{32} \left(\frac{aC^2}{\tau} + 3b\tau \right)}}$	$\sqrt{\frac{a}{3b}} C$	$\frac{Q_{in} \frac{8}{e}}{\sqrt{C} \sqrt[4]{3ab}}$	0,82	0,82	12,70	62,15	79,93
$CR - (RC)^3$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^4}$	$\frac{Q_{in} \frac{9}{2e^3}}{\sqrt{\frac{1}{64} \left(\frac{aC^2}{\tau} + 5b\tau \right)}}$	$\sqrt{\frac{a}{5b}} C$	$\frac{Q_{in} \frac{18\sqrt{2}}{e^3}}{\sqrt{C} \sqrt[4]{5ab}}$	0,85	0,85	14,76	57,48	72,16
$CR - (RC)^4$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^5}$	$\frac{Q_{in} \frac{32}{3e^4}}{\sqrt{\frac{5}{512} \left(\frac{aC^2}{\tau} + 7b\tau \right)}}$	$\sqrt{\frac{a}{7b}} C$	$\frac{Q_{in} \frac{512}{3\sqrt{5}e^4}}{\sqrt{C} \sqrt[4]{7ab}}$	0,86	0,86	16,63	55,95	69,01
Zespolony 1	$\frac{A_1^2 + W_1^2}{(\sigma s + A_1)^2 + W_1^2}$				0,74	10,99	69,75	82,75
Zespolony 2	$\frac{\sigma s A_0 (A_1^2 + W_1^2)}{(\sigma s + A_0)((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)}$				0,83	12,71	48,15	63,52
Zespolony 3	$\frac{(A_1^2 + W_1^2)(A_2^2 + W_2^2)}{((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)((\sigma s + A_2)^2 + W_2^2)}$				0,86	14,76	43,69	53,11
Zespolony 4	$\frac{\sigma s A_0 (A_1^2 + W_1^2)(A_2^2 + W_2^2)}{(\sigma s + A_0)((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)((\sigma s + A_2)^2 + W_2^2)}$				0,87	16,63	42,62	46,64
Trójkątny $\frac{(1 - e^{-sT_D})}{sT_D}$	$\frac{Q_{in}}{\sqrt{2 \frac{aC^2}{T_D} + \frac{2}{3} bT_D}}$	$\sqrt{\frac{3a}{b}} C$	$\frac{Q_{in}}{2\sqrt{2} \sqrt[4]{\frac{ab}{3}}}$	0,93	0,93	19,05	37,91	38,08

Analiza tabeli pozwala wysnuć kilka istotnych wniosków. Po pierwsze zarówno dla filtrów typu $CR - (RC)^p$ jak i filtrów z biegunami zespolonymi, wraz ze wzrostem rzędu filtru rośnie stosunek sygnału do szumu. Widać, że odpowiadające sobie rzędy filtru $CR - (RC)^p$ i filtru zespolonego mają podobne stosunki sygnału do szumu. Należy zwrócić tu uwagę, że dla każdego filtru zespolonego stała czasowa, a w rzeczywistości

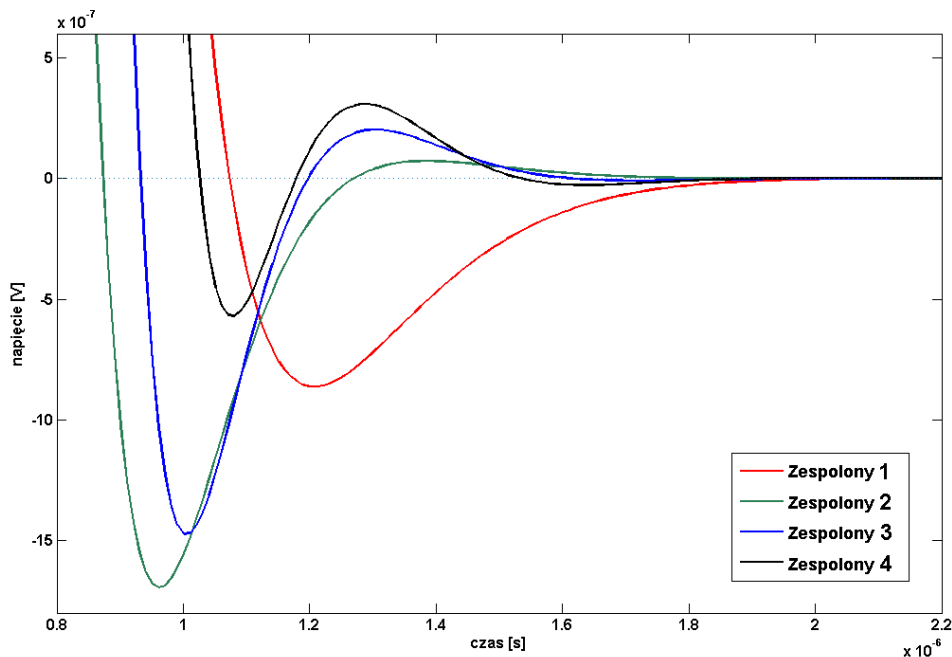
parametr σ nie został tu zoptymalizowany pod kątem stosunku sygnału do szumu, ale pod kątem zadanego *peaking time* odpowiadającego filtrowi rzeczywistemu. W dwóch ostatnich kolumnach opisujących czas trwania impulsów uwzględniony został tzw. przerzut, czyli zjawisko przechodzenia impulsu przez poziom zerowy.

Tabela 2.3. Wartość przerzutu impulsów po filtrze zespolonym wyrażona w procentach amplitudy

Filtr	% V_{out}^{max}
Zespolony 1	0,0445
Zespolony 2	0,1162
Zespolony 3	0,1001
Zespolony 4	0,0393

Sygnały po filtrach typu $CR - (RC)^p$ i trójkątnym nie wykazują takich przerzutów. Jednak sygnały po filtrach z biegunami zespolonymi podlegają temu zjawisku w sposób mający znaczenie dla czasu trwania impulsów. W tabeli 2.3 oraz na wykresie 2.30 pokazano zależność amplitudy przerzutu od rzędu filtru zespolonego. Widać, że największym przerzutem charakteryzuje się filtr zespolony rzędu 2, a najmniejszym rzędu 4.

Analiza numeryczna wykazała, że przerzut ten jest niezależny od *peaking time* sygnału wyjściowego. Skale na osiach wykresu 2.30 zawężone zostały do takich wartości aby pokazać jedynie sam przerzut. Należy zwrócić tu uwagę, że amplitudy impulsów na nim przedstawionych są rzędu pojedynczych miliwoltów, zatem przerzuty na poziomie pojedynczych mikrowoltów są niezauważalne w praktyce.



Rysunek 2.30. Powiększone obszary przerzutów impulsów po filtrach z biegunami zespolonymi w zakresie czasu trwania przerzutu (dla wszystkich wykresów $T_{0,1\%} = 1 \mu s$)

Z analizy całości tabeli 2.2 wynika, że filtracja zespolona, przy zachowaniu porównywalnego stosunku sygnału do szumu, daje dużo szybsze impulsy, osiągające 1%

amplitudy nawet o 30% szybciej niż daje to filtracja typu $CR - (RC)^p$ tego samego rzędu.

Aby dokładniej zbadać szybkość układu można sporządzić analogiczną do powyższej tabelę porównując parametry filtrów przy takim samym $T_{0,1\%} = 1\mu s$. Tabela 2.4 przedstawia takie właśnie porównanie.

Tabela 2.4. Porównanie różnych technik filtracji przy zadanym czasie trwania impulsu $T_{0,1\%} = 1\mu s$ ($C = 1 pF$, $\sqrt{a} = 6,6 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$, $\sqrt{b} = 0,6 \frac{fA}{\sqrt{Hz}}$, $Q_{in} = 23000 e$)

$T_{0,1\%} = 1\mu s$ dla wszystkich filtrów	Obliczenia numeryczne			
Filtr	$T_{peak}[ns]$	$T_{1\%}[ns]$	$\tau [ns]$	$\frac{SNR_{max}}{SNR_{opt}}$
Optymalny	∞	∞	∞	1
$CR - RC$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^2}$	100,10	760,76	99,61	0,0991
$CR - RC^2$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^3}$	160,16	780,78	80,08	0,1306
$CR - RC^3$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^4}$	200,20	800,80	69,01	0,1417
$CR - RC^4$ $\frac{s\tau}{(1+s\tau)^5}$	240,24	800,80	60,55	0,1466
Zespolony 1 $\frac{A_1^2 + W_1^2}{(\sigma s + A_1)^2 + W_1^2}$	140,14	840,84	105,46	0,1147
Zespolony 2 $\frac{\sigma s A_0 (A_1^2 + W_1^2)}{(\sigma s + A_0)((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)}$	200,20	760,76	76,17	0,1437
Zespolony 3 $\frac{(A_1^2 + W_1^2)(A_2^2 + W_2^2)}{((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)((\sigma s + A_2)^2 + W_2^2)}$	280,28	830,83	70,31	0,1596
Zespolony 4 $\frac{\sigma s A_0 (A_1^2 + W_1^2)(A_2^2 + W_2^2)}{(\sigma s + A_0)((\sigma s + A_1)^2 + W_1^2)((\sigma s + A_2)^2 + W_2^2)}$	350,35	900,90	66,41	0,1686
Trójkątny $\frac{(1 - e^{-sT_D})}{sT_D}$	500,00	990,99	500,00	0,2129

Jak wynika z tabeli dla filtrów o tym samym czasie trwania impulsu wyjściowego, filtracja zespolona charakteryzuje się lepszym SNR . Ostatnia kolumna tabeli 2.4 pokazuje stosunek SNR wybranego filtru do SNR filtru optymalnego z nieskończonym czasem pomiaru. Dokładniejsza analiza pokazuje, że zespolona filtracja szumów jest do 15% wydajniejsza od filtracji rzeczywistej tego samego rzędu. Oczywiście filtr trójkątny charakteryzuje się lepszymi wynikami.

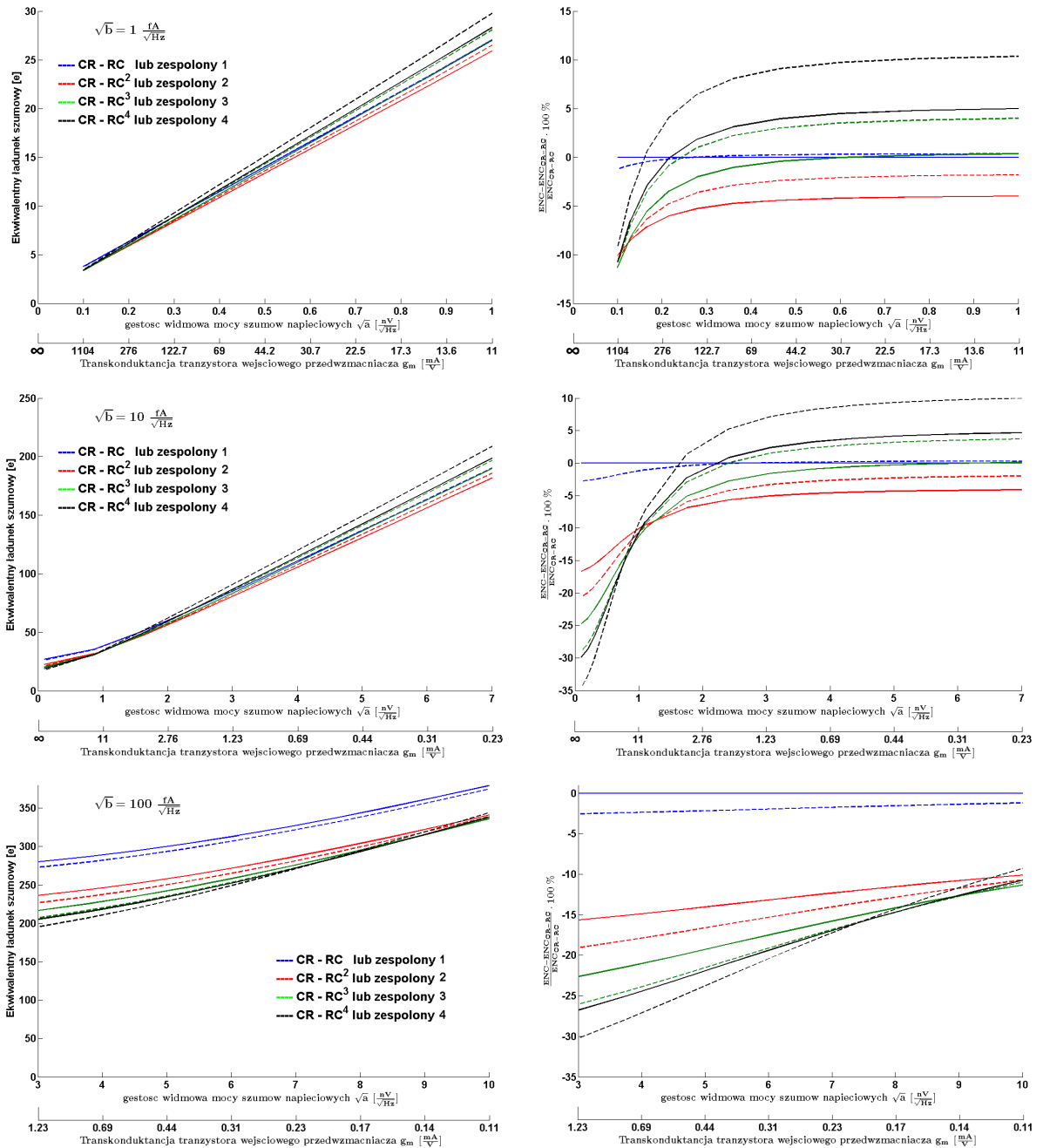
Ciekawą z punktu widzenia projektowania elektroniki *front - end* analizą jest sprawdzenie jak zachowywać się będzie układ przy różnych gęstościach widmowych mocy szumów prądowych i napięciowych, przy zachowaniu stałego *peaking time* lub czasu trwania impulsu. Na serii wykresów 2.31 przedstawiono w lewej kolumnie wartości ekwiwalentnego ładunku szumowego przy zadanej gęstości widmowej mocy szumów napięciowych dla trzech różnych wartości gęstości widmowej mocy szumów prądo-

wych. Po prawej stronie pokazano względny przyrost ekwiwalentnego ładunku szumowego dla każdego filtru, w odniesieniu do filtru $CR - RC$. Upraszczając można powiedzieć, że im krzywe w prawej kolumnie wykresów są bardziej poniżej zera, tym filtr taki daje mniejsze ENC w porównaniu z filtrem $CR - RC$. Na wszystkich wykresach (wykresy od 2.31 do 2.35) linia ciągła oznacza filtr typu $CR - (RC)^p$, a przerywana zespolony odpowiedniego rzędu.

Przy pomocy podwójnej osi na wykresach 2.31 pokazano na nich również wartości transkonduktancji tranzystora wejściowego przedwzmacniacza odpowiadającej danym szumom napięciowym. Założono tu, że szum napięciowy wynika tylko szumów termicznych kanału tranzystora i wyraża się uproszczonym wzorem (oznaczenia jak we wzorze 2.37):

$$\frac{d \langle v_{NT}^2 \rangle}{df} = a = \frac{8}{3} kT \frac{1}{g_m} . \quad (2.141)$$

Przekształcając wzór 2.141 otrzymano transkonduktancję g_m .

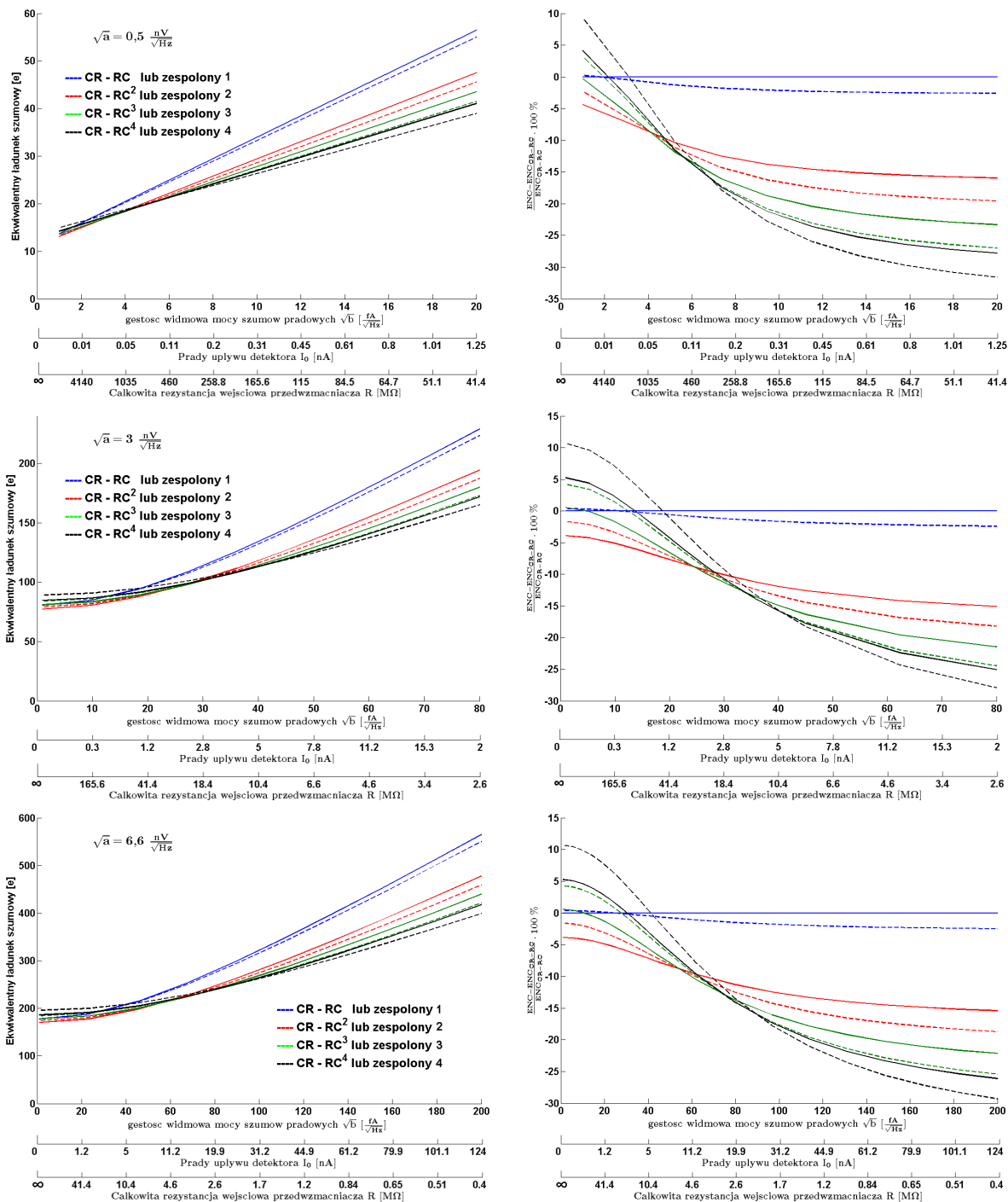


Rysunek 2.31. Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów napięciowych przy zachowaniu stałego $T_{peak} = 100$ ns

Na serii wykresów 2.32 pokazano analogicznie do wykresów 2.31 zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od gęstości widmowej mocy szumów prądowych dla filtrów zespolonych i $CR - (RC)^p$ różnych rzędów, przy zachowaniu stałego, takiego samego jak poprzednio *peaking time* impulsu. Podobnie jak poprzednio, na dodatkowych osiach przedstawiono tu wartości ekwiwalentnej rezystancji szumowej i prądów upływu detektora odpowiadające danym szumom prądowym. Zgodnie ze wzorem 1.9 gęstość widmowa mocy szumów prądowych jest proporcjonalna do wartości prądów upływu detektora i przy założeniu, że szum ten pochodzi tylko od nich obliczono

wartości I_0 . Wartości ekwiwalentnej rezystancji szumowej obliczono przy założeniu, że szumy prądowe pochodzą tylko od szumów termicznych. Analogicznie do zależności Nyquista (wzór 1.7), szum prądowy wyrażony jest wzorem:

$$\frac{d \langle I_{Nd}^2 \rangle}{df} = b = \frac{4kT}{R}. \quad (2.142)$$



Rysunek 2.32. Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu stałego $T_{peak} = 100 \text{ ns}$

Analiza wykresów 2.31 i 2.32 pozwala wnioskować, że dla ekstremalnych wartości szumów prądowych i napięciowych otrzymamy różne zależności między ENC dla różnych układów filtrujących. Gdy szumy prądowe dominują nad szumami napięciowymi to widać, że filtry zespolone wykazują lepsze właściwości filtrujące niż ich odpowiedniki rzeczywiste. Gdy szumy prądowe przestają odgrywać istotną rolę, a dominować zaczynają szumy napięciowe to filtracja zespolona staje się gorsza o średnio 5% od filtracji rzeczywistej. Zysk na szumach jest jednak nieznaczny i nie przekracza 5%. Na obu seriach wykresów (wykresy 2.31 i 2.32), dla średnich szumów prądowych i napięciowych widać moment w którym jeden rodzaj filtracji zaczyna dominować nad drugim (w sensie ekwiwalentnego ładunku szumowego). Jak widać przy zachowanym stałym *peaking time* impulsu zysk filtracji szumów jest nieznaczny dla odpowiadających sobie rzędów filtrów zespolonych i rzeczywistych. Warto zwrócić tu jedynie uwagę na fakt, że filtracja drugiego rzędu (mowa tu zarówno o filtrach zespolonych jak i rzeczywistych) ma lepsze własności filtrujące nawet o 15% od filtracji pierwszego rzędu (dla odpowiednich szumów prądowych i napięciowych). Dla wyższych rzędów zysk ten jest już znacznie mniejszy.

Aby sprawdzić poprawność wygenerowanych wykresów można dla przykładu podać analityczne rozwiązania dla filtrów typu $CR - (RC)^p$. Zgodnie ze wzorami 2.69 oraz 2.35 wartość ekwiwalentnego ładunku szumowego dana jest jako stosunek wartości średniokwadratowej mocy szumów na wyjściu układu (opisanej wzorem 2.67) do jego wzmocnienia ładunkowego. Biorąc pod uwagę analityczne rozwiązania na wartość napięcia w pikie na wyjściu filtru typu $CR - (RC)^p$ (wzór 2.109) oraz na wartość średniokwadratową mocy szumów (wzór 2.110) otrzymujemy formułę na ENC dla tego typu filtracji dowolnego rzędu:

$$ENC = \frac{\sqrt{A^2 \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{4\sqrt{\pi}p!} \left(\frac{a}{\tau} + \frac{b(2p - 1)\tau}{C^2} \right)}}{\frac{AQ_{in} p^p}{C p! e^p} \frac{1}{N_{e-h}}} . \quad (2.143)$$

Musimy następnie założyć, że *peaking time* impulsu jest stały dla różnych rzędów filtru i opisany jest formułą $T_{peak} = p \cdot \tau$. Aby być w zgodzie z wykresami 2.32 przyjmujemy, że $T_{peak} = 100 \text{ ns}$. Zatem otrzymujemy, że stała czasowa kształtowania jest zależna od rzędu filtru i wynosi:

$$\tau = \frac{T_{peak}}{p} . \quad (2.144)$$

Wzór 2.143 przekształca się do postaci:

$$ENC = \frac{\sqrt{A^2 \frac{\Gamma(p - \frac{1}{2})}{4\sqrt{\pi}p!} \left(\frac{ap}{T_{peak}} + \frac{bT_{peak}(2p-1)}{pC^2} \right)}}{\frac{AQ_{in} p^p}{C p! e^p} N_{e-h}}. \quad (2.145)$$

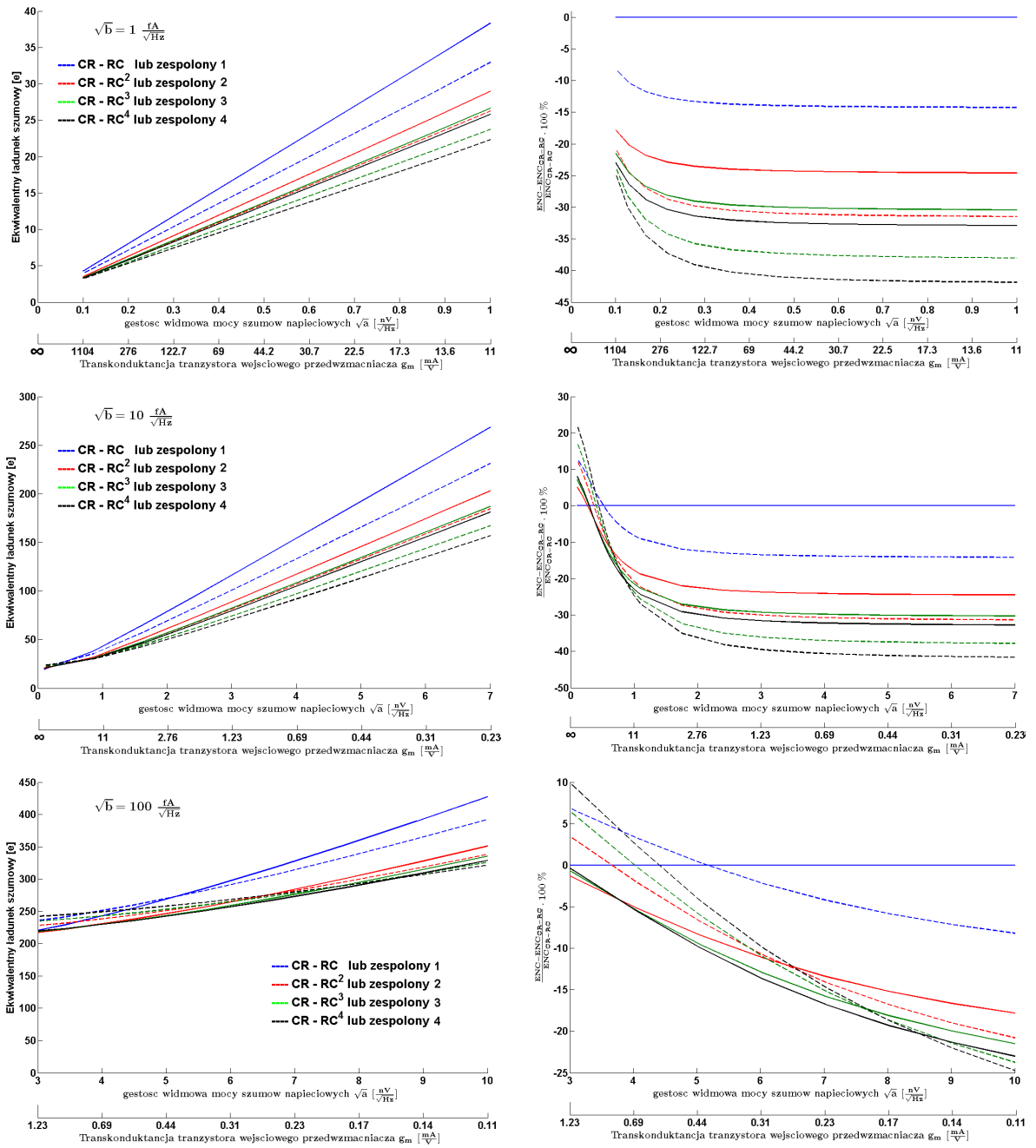
Przyjmujemy, że moc szumów prądowych równa jest $\sqrt{b} = 80 \frac{fA}{\sqrt{Hz}}$, a moc szumów napięciowych $\sqrt{a} = 3 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$. Ładunek wstrzykiwany do przedwzmacniacza wynosi standardowo $Q_{in} \approx 4 fC$, co odpowiada liczbie par elektron – dziura wygenerowanych w detektorze równej $N_{e-h} = 23000$. W tabeli 2.5 przedstawiono wyniki obliczeń analitycznych.

Tabela 2.5. Analityczne i numeryczne porównanie filtracji typu $CR - (RC)^p$ dla różnych rzędów przy zastosowaniu parametru ENC ($C = 1 pF$, $\sqrt{a} = 3 \frac{nV}{\sqrt{Hz}}$, $\sqrt{b} = 80 \frac{fA}{\sqrt{Hz}}$, $Q_{in} = 23000 e$)

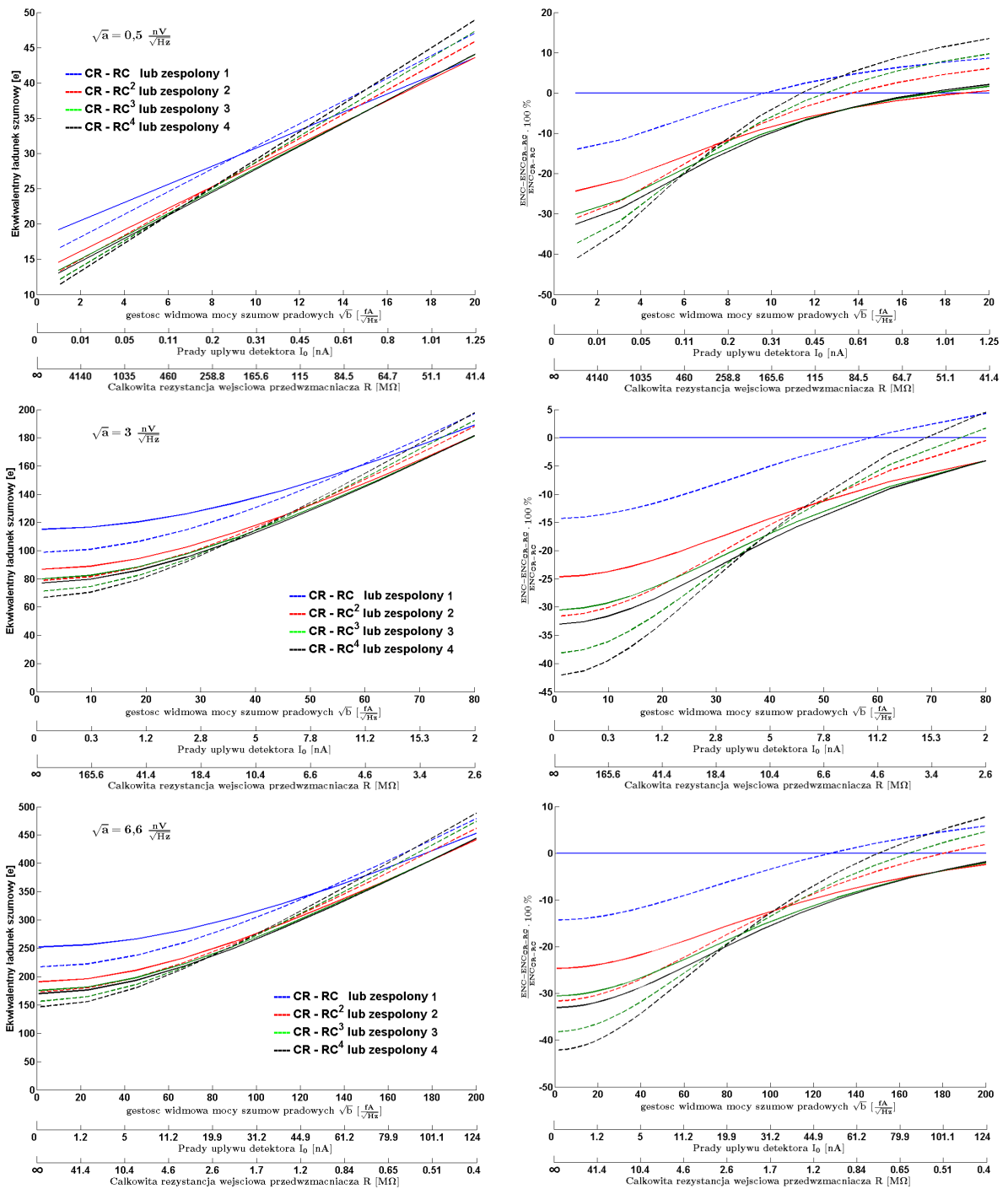
Filtr	σ (wzór)	σ (wartość)	V_{out}^{max} (wzór)	V_{out}^{max} (wartość)	ENC
$CR - RC \frac{s\tau}{(1+s\tau)^2}$	$\sqrt{\frac{A^2}{8} \left(\frac{a}{T_p} + \frac{bT_p}{C^2} \right)}$	$13,5 \mu V \cdot A$	$\frac{AQ_{in}}{eC}$	$1,4 mV \cdot A$	$229,2 e$
$CR - (RC)^2 \frac{s\tau}{(1+s\tau)^3}$	$\sqrt{\frac{A^2}{32} \left(\frac{2a}{T_p} + \frac{3bT_p}{2C^2} \right)}$	$8,4 \mu V \cdot A$	$\frac{2AQ_{in}}{e^2C}$	$1 mV \cdot A$	$194,7 e$
$CR - (RC)^3 \frac{s\tau}{(1+s\tau)^4}$	$\sqrt{\frac{A^2}{64} \left(\frac{3a}{T_p} + \frac{5bT_p}{3C^2} \right)}$	$6,5 \mu V \cdot A$	$\frac{9AQ_{in}}{2e^3C}$	$0,8 mV \cdot A$	$180,1 e$
$CR - (RC)^4 \frac{s\tau}{(1+s\tau)^5}$	$\sqrt{\frac{5A^2}{512} \left(\frac{4a}{T_p} + \frac{7bT_p}{4C^2} \right)}$	$5,4 \mu V \cdot A$	$\frac{32AQ_{in}}{3e^4C}$	$0,7 mV \cdot A$	$171,8 e$

Analiza tabeli i wykresów 2.32 pozwala wnioskować o poprawności powyższych oraz dalszych obliczeń. Przy dokładnej analizie wartości na wykresach i w tabeli można zauważyć drobne rozbieżności. Wynikają one z niedokładności obliczeń numerycznych przy pomocy których były generowane wszystkie wykresy. Ogólna zależność i wzajemne relacje między ekwiwalentnym ładunkiem szumowym po filtrach $CR - (RC)^p$ różnych rzędów zgadzają się dla obliczeń analitycznych (tabela 2.5) jak i numerycznych (seria wykresów 2.32).

Projektując szybkie układy odczytu detektora promieniowania często interesuje nas nie *peaking time* impulsu lecz jego czas trwania, określony tu jako $T_{0,1\%}$ czyli czas po jakim impuls osiąga 0,1% swojej amplitudy. Seria wykresów 2.33 i 2.34 jest odpowiednikiem wykresów 2.31 i 2.32 tyle, że przy zachowaniu stałego $T_{0,1\%}$.



Rysunek 2.33. Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów napięciowych przy zachowaniu stałego $T_{0,1\%} = 500 \text{ ns}$



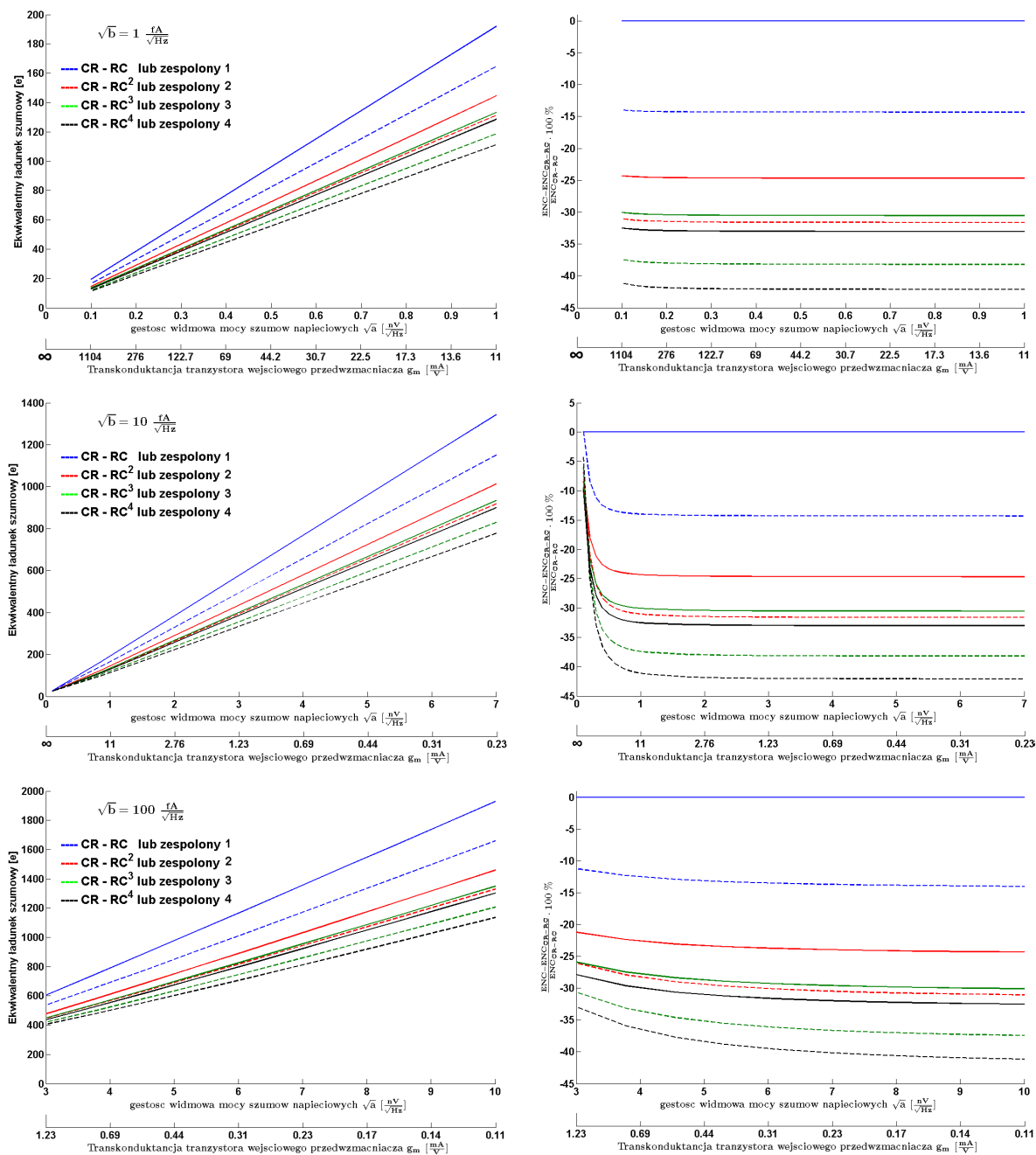
Rysunek 2.34. Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu stałego $T_{0,1\%} = 500 \text{ ns}$

Podobnie jak przy analizie dla stałego *peaking time* impulsu na wykresach 2.33 i 2.34 widać wyraźne różnice we właściwościach różnych filtrów. Dla małych szumów prądowych a dużych napięciowych filtry zespolone wykazują lepsze właściwości filtrujące niż nich odpowiedniki rzeczywiste, natomiast dla dużych szumów prądowych a małych napięciowych filtry rzeczywiste lepiej filtrują szumy. Różnice te są jednak o wiele większe niż przy analizie dla stałego *peaking time* impulsu i wynoszą tu od 5%

gdy filtry rzeczywiste dominują nad filtrami zespolonymi nawet do 15% gdy sytuacja jest odwrotna.

Zysk na szumach rzędu 15% jest na tyle duży, że racjonalne staje się myślenie o faktycznym zastosowaniu filtracji typu zespolonego w elektronice *front – end*. Obecnie, podczas projektowania układów kształtująco – filtrujących szumy wyjściowe zmniejsza się poprzez zwiększanie stałej czasowej filtru, zazwyczaj typu $CR-(RC)^p$. Zwiększanie stałej czasowej wydłuża jednak impuls, w wyniku czego cały układ staje się wolniejszy. Zastosowanie filtracji z biegunami zespolonymi pozwoliłoby przy zachowaniu takiej samej szybkości działania układu zredukować szumy nawet o 15%.

Na etapie projektowania elektroniki kształtująco – filtrującej znamy zazwyczaj pojemność na wejściu przedwzmacniacza na którą składa się pojemność sprzężenia zwrotnego wzmacniacza ładunkowego, pojemności jego tranzystora wejściowego oraz pojemność detektora. Warto sprawdzić jak będą się zachowywać szumy przy ustalonym czasie trwania impulsu dla różnych pojemności. Seria wykresów 2.35 pokazuje takie porównanie dla pojemności wejściowej $C_{in} = 5 pF$ (porównanie do serii wykresów 2.33 gdzie pojemność wejściowa wynosiła $C_{in} = 1 pF$).



Rysunek 2.35. Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu $T_{0,1\%} = 500 \text{ ns}$ ($C_{in} = 5 \text{ pF}$)

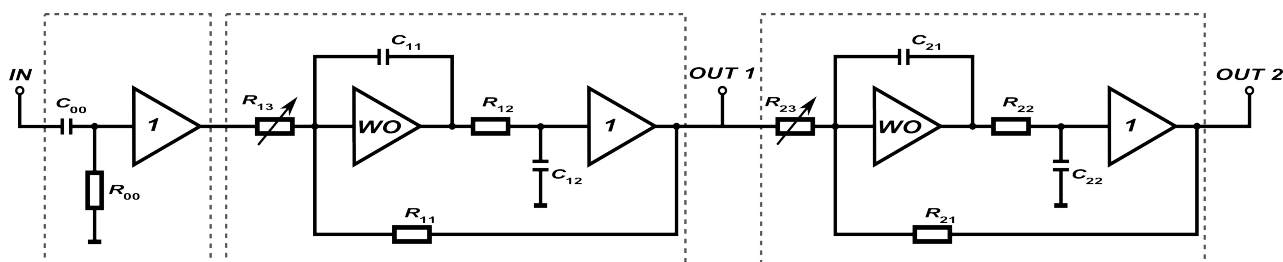
Na wykresach tych widać, że dla dużych pojemności wejściowych wzmacniacza różnice we właściwościach filtracyjnych ustalają się i wzajemna korespondencja między szumami napięciowymi i prądowymi ma mniejsze znaczenie. Filtry zespolone wykazują tu lepsze właściwości szumowe od ich odpowiedników rzeczywistych o średnio 10 – 15%.

3. Część praktyczna pracy

Celem części praktycznej pracy było zaprojektowanie, a następnie wykonanie filtru umożliwiającego realizację biegunów zespolonych. Wybór padł na filtr z zakresem regulacji biegunów tak dobranym, aby dało się też zrealizować na jednym układzie filtr rzeczywisty typu $CR - RC^p$. Dało to możliwość porównania kształtów impulsów, szumów oraz właściwości czasowych filtru typu $CR - RC^p$ z filtrem o biegunach zespolonych tego samego rzędu. Ponieważ zaprojektowany układ pozwala na badanie dwóch typów filtracji, w dalszej części pracy gdy stałe czasowe układu ustawione będą jak dla filtracji z biegunami rzeczywistymi to układ taki nazywany będzie filtrem rzeczywistym. Gdy stałe czasowe ustawione będą jak dla filtracji z biegunami zespolonymi układ ten będzie nazywany filtrem zespolonym.

3.1. Projekt filtru

Schemat ideowy układu przedstawia rysunek 3.1. Na schemacie wyodrębniony jest układ różniczkujący oraz dwa stopnie o biegunach zespolonych. Oznaczone jest również wejście oraz dwa wyjścia: po pierwszym i drugim stopniu filtru. Pierwsza cyfra indeksu elementów oznacza kolejny numer podukładu, a druga numer danego elementu w podukładzie.



Rysunek 3.1. Schemat ideowy filtru

Pełna funkcja przenoszenia tego układu określona jest równaniem:

$$H(s) = \left[\frac{sC_{00}R_{00}}{1 + sC_{00}R_{00}} \right] \left[\frac{R_{11}}{R_{13}} \frac{1}{1 + sC_{11}R_{11} + s^2C_{11}R_{11}C_{12}R_{12}} \right] \cdot \left[\frac{R_{21}}{R_{23}} \frac{1}{1 + sC_{21}R_{21} + s^2C_{21}R_{21}C_{22}R_{22}} \right] \quad (3.1)$$

Funkcja przenoszenia ma pięć biegunów, przy czym cztery z nich są biegunami zespolonymi, parami sprzężonymi.

$$s_1 = \frac{1}{C_{00}R_{00}} \quad (3.2)$$

$$s_{2,3} = \frac{1}{2C_{12}R_{12}} \left(-1 \pm j\sqrt{\frac{4C_{12}R_{12}}{C_{11}R_{11}} - 1} \right) \quad (3.3)$$

$$s_{4,5} = \frac{1}{2C_{22}R_{22}} \left(-1 \pm j\sqrt{\frac{4C_{22}R_{22}}{C_{21}R_{21}} - 1} \right) \quad (3.4)$$

Potencjometry R_{13} oraz R_{23} służą do regulacji wzmocnienia danego stopnia zespolonego. W układzie, jako wtórniki oraz wzmacniacze operacyjne zastosowane zostały układy AD8044 charakteryzujące się niskimi szumami oraz szerokim pasmem przenoszenia sygnału, wynoszącym 150 MHz.

3.1.1. Dobieranie pojemności i ustawianie stałych czasowych

Każda pojemność w układzie regulowana jest w szerokim zakresie od 50 pF do 29,99 nF z krokiem co 50 pF. Tak dokładną możliwość regulacji pojemności, a co za tym idzie regulacji stałych czasowych, uzyskano tu za pomocą równoległego łączenia pojemności przy pomocy przełączników typu DIP.

Bieguny rzeczywiste

Bieguny funkcji przenoszenia opisane wzorami 3.3 oraz 3.4 w ogólnym przypadku są biegunami zespolonymi. Jednak analizując je można stwierdzić, że przy zachowaniu warunków:

$$\begin{cases} C_{11}R_{11} = 4C_{12}R_{12} \\ C_{21}R_{21} = 4C_{22}R_{22} \end{cases}, \quad (3.5)$$

uzyskamy funkcje przenoszenia z podwójnymi, rzeczywistymi biegunami. W takim przypadku zestaw biegunów funkcji będzie się prezentował następująco:

$$s_1 = \frac{1}{C_{00}R_{00}} \quad \text{biegun pojedynczy} \quad (3.6)$$

$$s_{2,3} = \frac{1}{2C_{12}R_{12}} \quad \text{biegun podwójny} \quad (3.7)$$

$$s_{4,5} = \frac{1}{2C_{22}R_{22}} \quad \text{biegun podwójny} \quad (3.8)$$

Zatem przy odpowiednio dobranych stałych czasowych możemy zrealizować filtr typu $CR - (RC)^2$, oraz $CR - (RC)^4$. Warunek powyższy spełniony został przy pomocy

odpowiedniego dobrania rezystorów przy nie zmienionych pojemnościach. Prowadzi to do formuły na warunki, jakie muszą spełniać rezystancje w układzie:

$$\begin{cases} R_{00} = 2R_{12} = \frac{1}{2}R_{11} \\ R_{00} = 2R_{22} = \frac{1}{2}R_{21} \end{cases} \quad (3.9)$$

Spełnienie powyższych warunków powoduje, że ustawiając wszystkie pojemności na taką samą wartość otrzymamy filtr o zadanym rzędzie i stałej kształtowania $\tau_0 = CR_{00}$. Dla $R_{00} = 1 \text{ k}\Omega$ i odpowiadających mu pozostałych rezystancji otrzymujemy możliwość regulacji stałej kształtowania w przedziale od 50 ns do $29,99 \text{ }\mu\text{s}$ w 598 regularnie rozłożonych krokach zarówno dla filtru $CR - (RC)^2$ jak i $CR - (RC)^4$.

Bieguny zespolone

Zaprojektowany układ, oprócz biegunów rzeczywistych daje oczywiście możliwość ustawiania biegunów zespolonych rzędu 2 (jednego bieguna rzeczywistego i dwóch biegunów zespolonych sprzężonych), oraz rzędu 4 (bieguna rzeczywistego i dwóch par sprzężonych biegunów zespolonych). Jak zasygnalizowano to w rozdziale 2.3.2 bieguny rozwinięcia w szereg Taylora wielomianu Hurwitza dla rzędów wyższych niż 2 muszą być obliczane numerycznie. W tabeli 3.1 pokazane zostały ich wartości dla dwóch rozważanych tu rzędów filtrów. W tabeli tej A_i to części rzeczywiste bieguna, a W_i to jego części urojone. Podano tu również wartości parametru σ , którego znaczenie oraz sposób obliczania przedstawiony jest poniżej.

Tabela 3.1. Bieguny rozwinięcia w szereg Taylora wielomianu Hurwitza dla rzędu 2 oraz 4

	$n = 2$	$n = 4$
A_0	1,2633	1,4766
A_1	1,1491	1,4167
W_1	0,7864	0,5978
A_2	–	1,2037
W_2	–	1,2995
σ	1,4739	2,0421

Porównując funkcję przenoszenia zaprojektowanego filtru (wzór 3.1) z funkcją przenoszenia filtru zespolonego wyprowadzoną w rozdziale 2.3.2 (wzór 2.137) otrzymujemy bieguny funkcji przenoszenia uzależnione od parametru σ . Posłużymy się tym parametrem aby mieć możliwość porównania filtru zespolonego z filtrem rzeczywistym. Aby go wyliczyć musimy narzucić dodatkowy warunek. Można to zrobić na różne sposoby. Jeden z nich to ustalenie takiego samego czasu, po jakim pojawia się maksimum piku na wyjściu układu (tzw. *peaking time*) dla obu typów kształtowania. Warunek ten jest jednak niejednoznaczny i trudny do spełnienia. Łatwiejszym sposobem wydaje się być porównanie pól pod impulsem wyjściowym przy założeniu takiej samej amplitudy. Pole pod idealnym przebiegiem gaussowskim o jednostkowej amplitudzie wynosi:

$$S_G = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}\frac{t^2}{\sigma^2}} dt = \sqrt{2\pi}\sigma . \quad (3.10)$$

Pole pod impulsem na wyjściu filtru $CR - (RC)^2$:

$$S_{CR - (RC)^2} = \frac{e^2}{2} \int_0^{+\infty} \frac{1}{2!} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^2 e^{-\frac{t}{\tau_0}} dt = \frac{e^2}{2} \tau_0 . \quad (3.11)$$

Natomiast pole pod impulsem na wyjściu filtru $CR - (RC)^4$:

$$S_{CR - (RC)^4} = \frac{3e^2}{32} \int_0^{+\infty} \frac{1}{4!} \left(\frac{t}{\tau_0}\right)^4 e^{-\frac{t}{\tau_0}} dt = \frac{3e^2}{32} \tau_0 . \quad (3.12)$$

Wyrażenie podcałkowe jest tu przebiegiem czasowym impulsu, a wyrażenie przed całką jest odwrotnością amplitudy impulsu, normalizujące funkcję do amplitudy równej 1. Porównując pola pod pikami możemy wyprowadzić warunek na parametr σ dla dwóch typów filtracji:

$$S_G = S_{CR-(RC)^2} \Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma = \frac{e^2}{2} \tau_0 \Rightarrow \sigma_{CR-(RC)^2} = 1,4739 \tau_0 \quad (3.13)$$

$$S_G = S_{CR-(RC)^4} \Rightarrow \sqrt{2\pi}\sigma = \frac{3e^2}{32} \tau_0 \Rightarrow \sigma_{CR-(RC)^4} = 2,0421 \tau_0 \quad (3.14)$$

Technika porównywania pól pod pikami jest może mało intuicyjna, ale daje ona wgląd we właściwości czasowe impulsu przy takiej samej mocy przenoszonego impulsu. Analizując wzory 3.2, 3.3, 3.4 oraz wzór na funkcję przenoszenia 2.137 można wypisać warunki, jakie muszą spełniać stałe czasowe $C_{ij}R_{ij}$:

$$\begin{aligned} C_{00}R_{00} &= \frac{\sigma}{A_0} \\ A_1 &= \frac{\sigma}{2C_{12}R_{12}} & A_2 &= \frac{\sigma}{2C_{22}R_{22}} \\ W_1 &= \frac{\sigma}{2C_{12}R_{12}} \sqrt{\frac{4C_{12}R_{12}}{C_{11}R_{11}} - 1} & W_2 &= \frac{\sigma}{2C_{22}R_{22}} \sqrt{\frac{4C_{22}R_{22}}{C_{21}R_{21}} - 1} \end{aligned} \quad (3.15)$$

Ustawienia stałych czasowych do porównań

Dla filtru rzeczywistego i zespolonego została przeprowadzona seria pomiarów kształtów impulsów wyjściowych dla danych parametrów kształtowania rzeczywistego i odpowiadających im parametrów kształtowania zespolonego. Stałe czasowe obu rodzajów filtracji, z uwzględnieniem dokładności ustawiania przedstawia tabela 3.2.

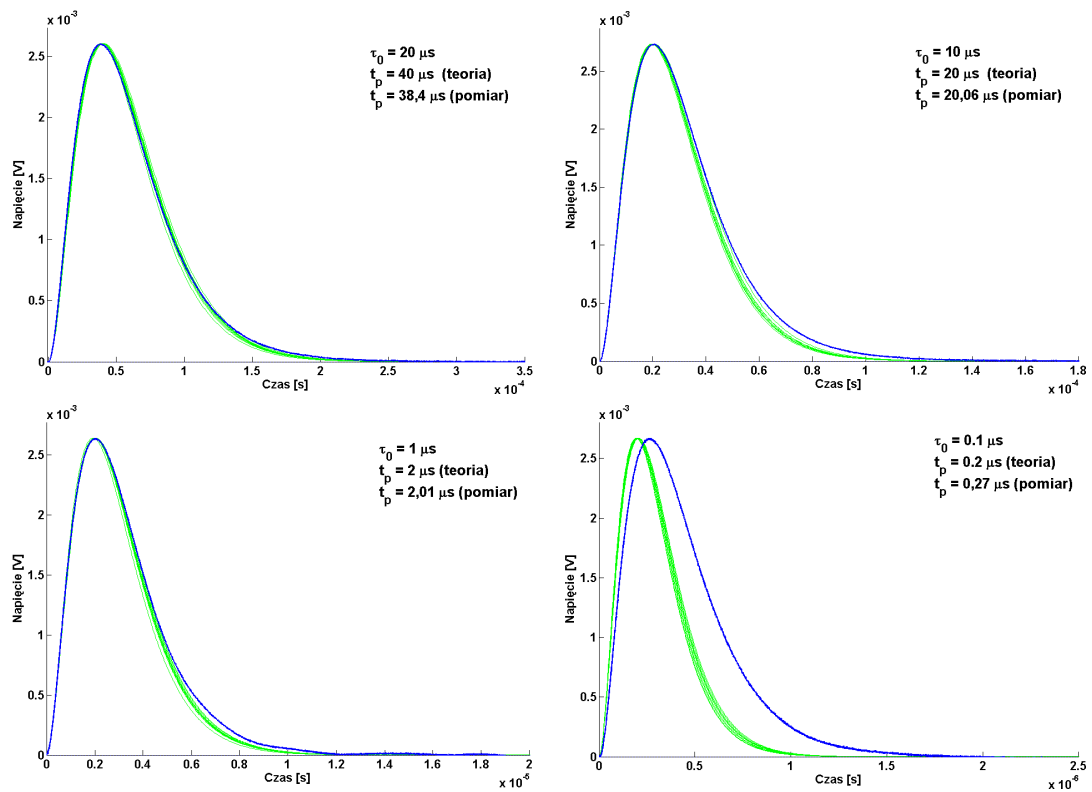
Tabela 3.2. Stałe czasowe dwóch rodzajów filtracji ustawiane w układzie (wszystkie wartości podawane są w μs)

Filtr	τ_0	$C_{00}R_{00}$	$C_{11}R_{11}$	$C_{12}R_{12}$	$C_{21}R_{21}$	$C_{22}R_{22}$
$CR - (RC)^2$	0,1	0,1	0,2	0,05	–	–
	1	1	2	0,5	–	–
	3	3	6	1,5	–	–
	5	5	10	2,5	–	–
	10	10	20	5	–	–
	20	20	40	10	–	–
$CR - (RC)^4$	0,1	0,1	0,2	0,05	0,2	0,05
	1	1	2	0,5	2	0,5
	3	3	6	1,5	6	1,5
	5	5	10	2,5	10	2,5
	10	10	20	5	20	5
	20	20	40	10	40	10
Zespolony 2	0,1	0,1	0,15	0,05	–	–
	1	1,15	1,75	0,65	–	–
	3	3,5	5,25	1,9	–	–
	5	5,85	8,75	3,2	–	–
	10	11,65	17,45	6,4	–	–
	20	23,35	34,95	12,8	–	–
Zespolony 4	0,1	0,15	0,25	0,05	0,15	0,1
	1	1,4	2,45	0,7	1,55	0,85
	3	4,15	7,35	2,15	4,7	2,55
	5	6,9	12,25	3,6	7,85	4,25
	10	13,8	24,45	7,2	15,65	8,5
	20	27,65	48,95	14,4	31,35	16,95

W tabeli tej stała czasowa filtru zespolonego oznacza stałą czasową filtru rzeczywistego do którego dany filtr zespolony był porównywany.

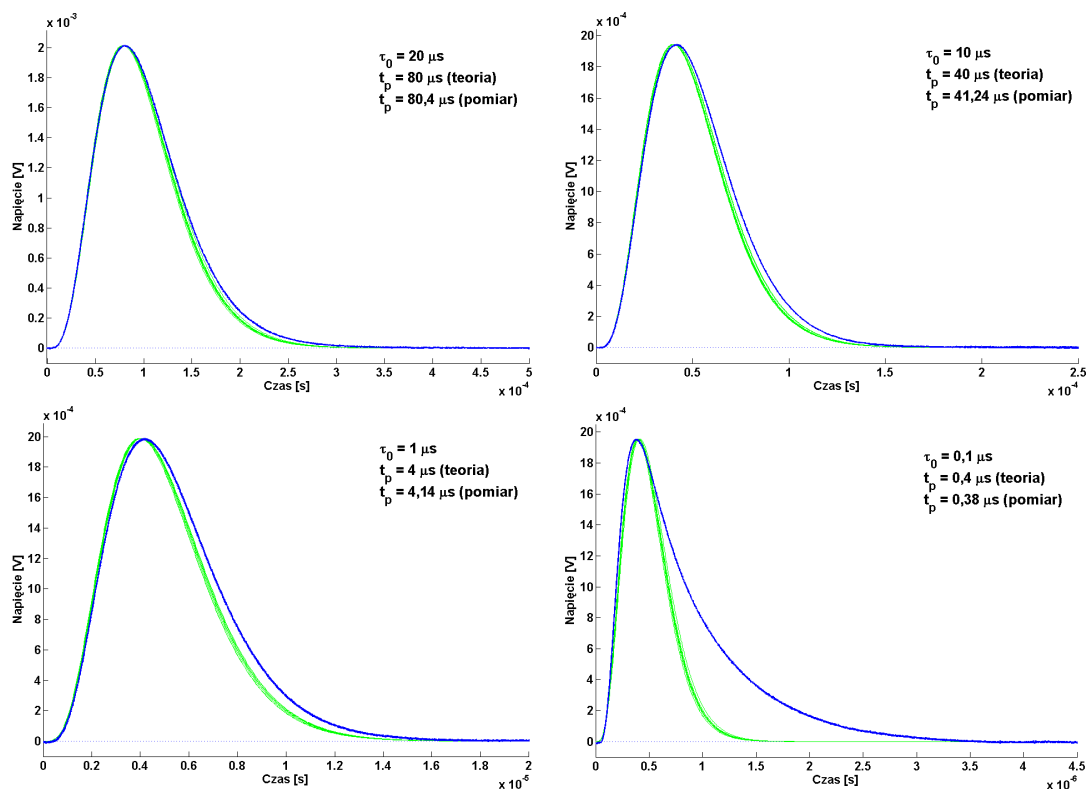
3.2. Przebiegi czasowe

Dla filtru $CR - (RC)^2$ i $CR - (RC)^4$ oraz dla zespolonego filtru rzędu 2 i 4 została przeprowadzona seria pomiarów przebiegów czasowych. Wyniki pomiarów odpowiedzi na skok napięcia przedstawione są na wykresach 3.2, 3.3, 3.4 oraz 3.5. Kolorem zielonym zaznaczono dodatkowo dziesięć krzywych teoretycznych uwzględniających 10% rozrzut wartości elementów (głównie rezystancji). Krzywe uwzględniające rozrzuty generowane były metodą Monte Carlo, przy czym każda stała czasowa losowana była niezależnie. Wykresy podzielone zostały na cztery grupy, tzn. wykresy impulsów z filtrów rzeczywistych $CR - (RC)^2$ i $CR - (RC)^4$ oraz wykresy odpowiadających im impulsów po filtrze zespolonym rzędu 2 i 4. W ramkach na wykresach pokazano wartość ustawianej stałej czasowej filtru (τ_0) oraz teoretyczny i zmierzony *peaking time* impulsu.



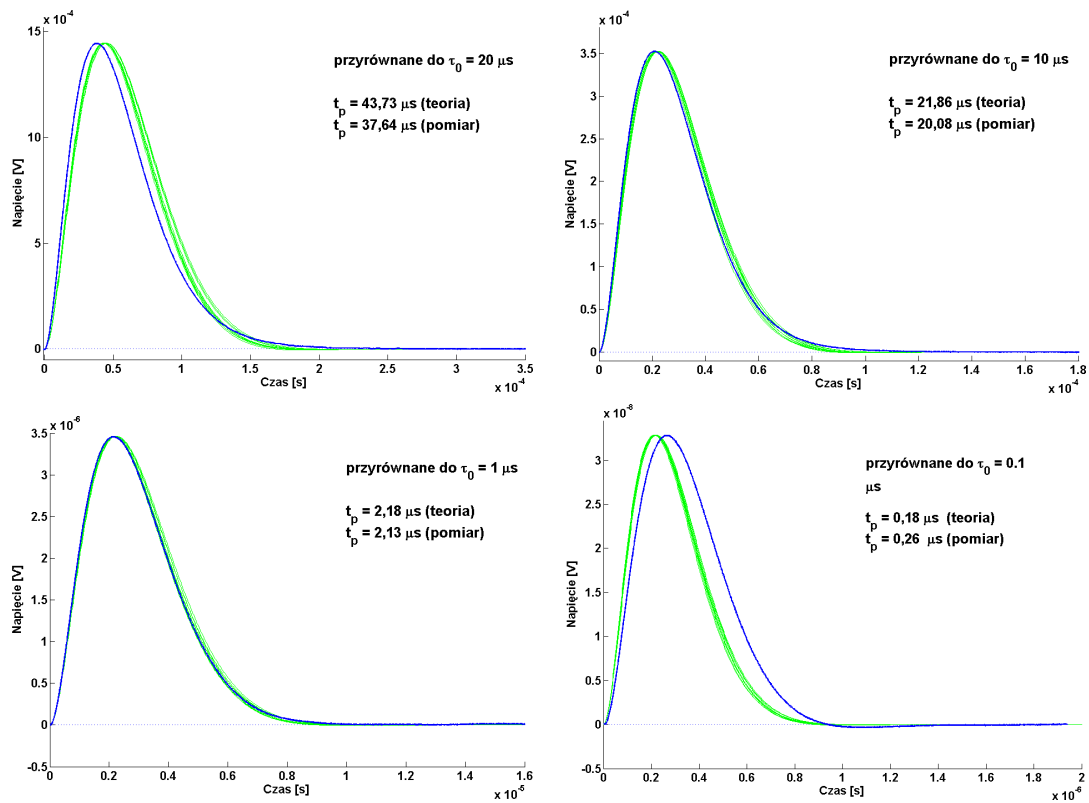
Rysunek 3.2. Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^2$

Analizując serię wykresów dla filtra $CR - RC^2$ można stwierdzić, że zmierzone przebiegi bardzo dobrze pokrywają się z krzywymi teoretycznymi. Dopiero dla czasów kształtowania rzędu $0,1 \mu\text{s}$ impulsy stają się wolniejsze niż przewiduje to teoria. Wynika to z ograniczonego pasma przenoszenia wzmacniaczy operacyjnych zastosowanych w układzie.



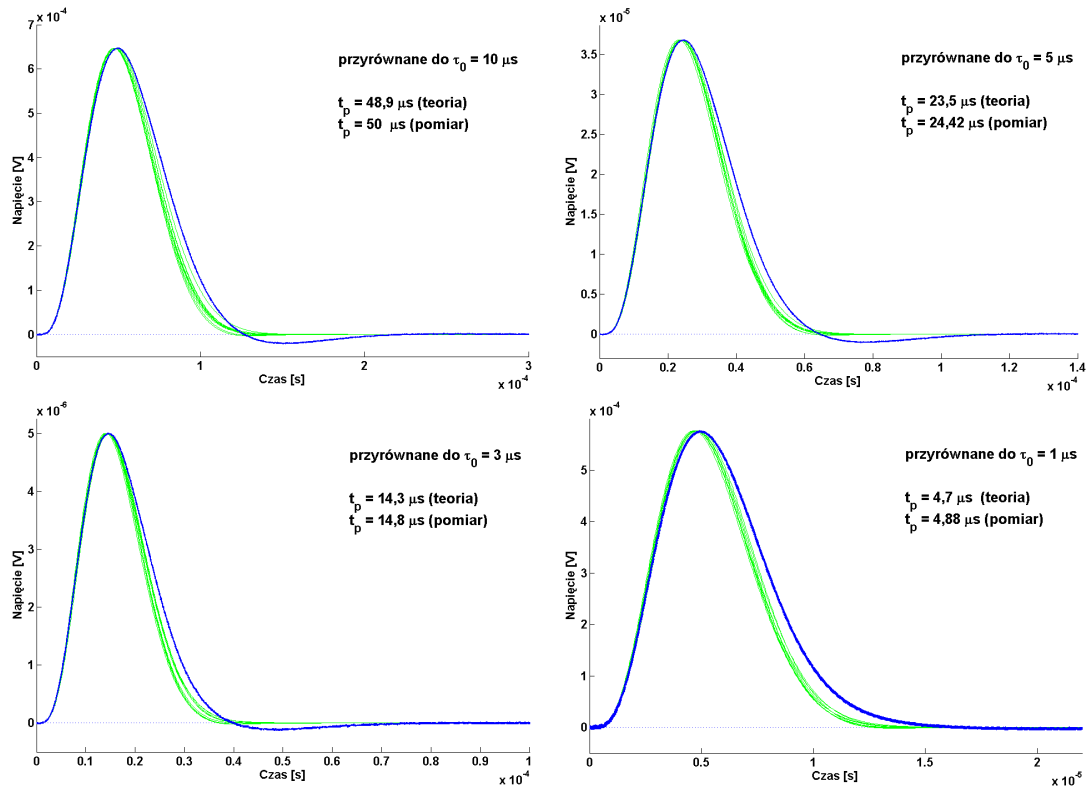
Rysunek 3.3. Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^4$

Dla filtru rzeczywistego rzędu 4 zmierzone impulsy zgadzają się z teorią w podobnym stopniu jak to miało miejsce dla filtru rzeczywistego rzędu 2. Również podobnie jak wcześniej, ze względu na skończone pasmo przenoszenia wzmacniaczy operacyjnych, impulsy o czasach kształtowania rzędu $0,1 \mu\text{s}$ przestają odpowiadać teorii.



Rysunek 3.4. Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze z biegunami zespolonymi rzędu 2

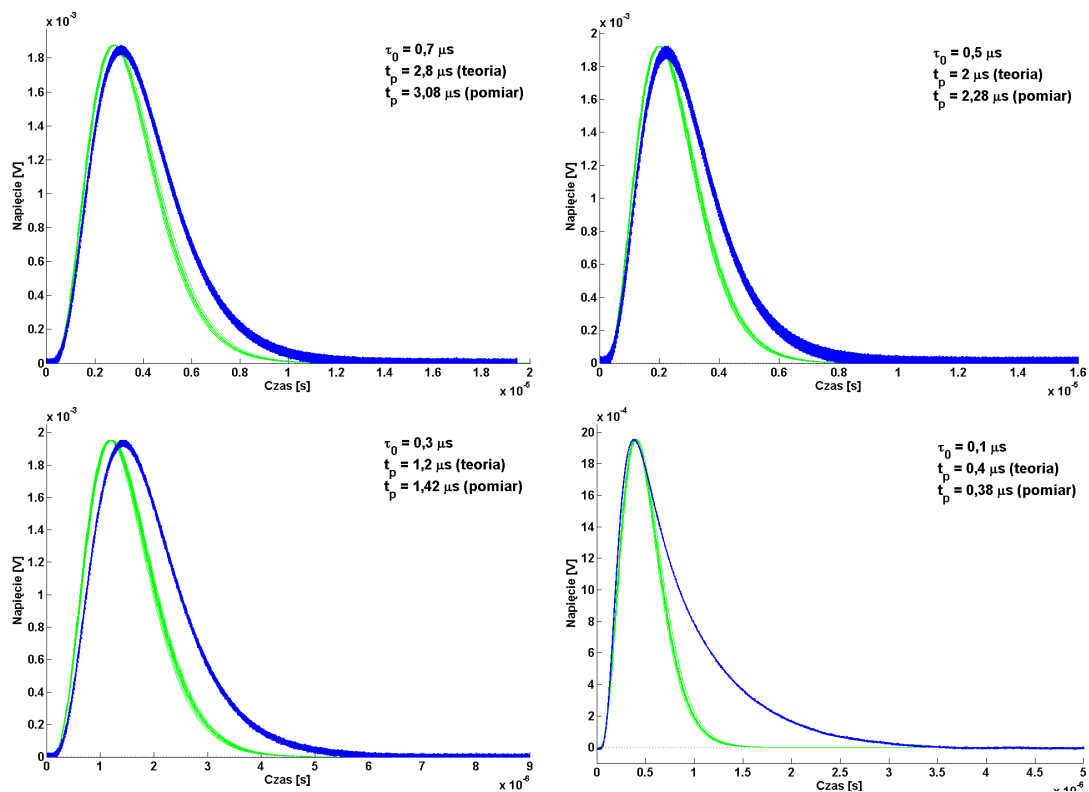
Seria wykresów impulsów wyjściowych dla filtru zespolonego, pokazuje bardzo dobrą zgodność otrzymywanych krzywych z teorią. Podobnie jak to miało miejsce dla filtrów rzeczywistych. W wyniku ograniczonego pasma przenoszenia wzmacniaczy operacyjnych układ przestaje zachowywać się zgodnie z teorią przy czasach kształtowania rzędu $0,1 \mu\text{s}$.



Rysunek 3.5. Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze z biegunami zespolonymi rzędu 4

Jak pokazały pomiary impulsy z czasami kształtowania poniżej $1 \mu s$ nie odpowiadają już w tak dokładny sposób impulsom teoretycznym jak impulsy o dłuższych czasach kształtowania. Wynika to z faktu, że kształtowanie poniżej $1 \mu s$ odpowiada częstotliwości przenoszenia powyżej $10 MHz$, a częstotliwości te są już na granicy pasma przenoszenia wzmacniaczy operacyjnych pracujących z zadanym wzmocnieniem. Dodatkowy efekt wprowadzają tu pojemności pasożytnicze odgrywające znacznie większą rolę przy tych częstotliwościach. Niedokładności w kształtach impulsów (szczególnie dla filtru zespolonego) spowodowane są w znacznej mierze dyskretyzacją ustawiania stałych czasowych, co nie zawsze udawało się zrobić dokładnie. Szczególnie widoczne jest to przy krótszych czasach kształtowania.

Aby zrozumieć lepiej zachowanie się układu dla submikrosekundowych stałych kształtowania przeprowadzono serię pomiarów kształtów impulsów dla stałych czasowych poniżej $1 \mu s$. Pokazane to zostało na serii wykresów 3.6 dla przykładowego kształtowania $CR - (RC)^4$.

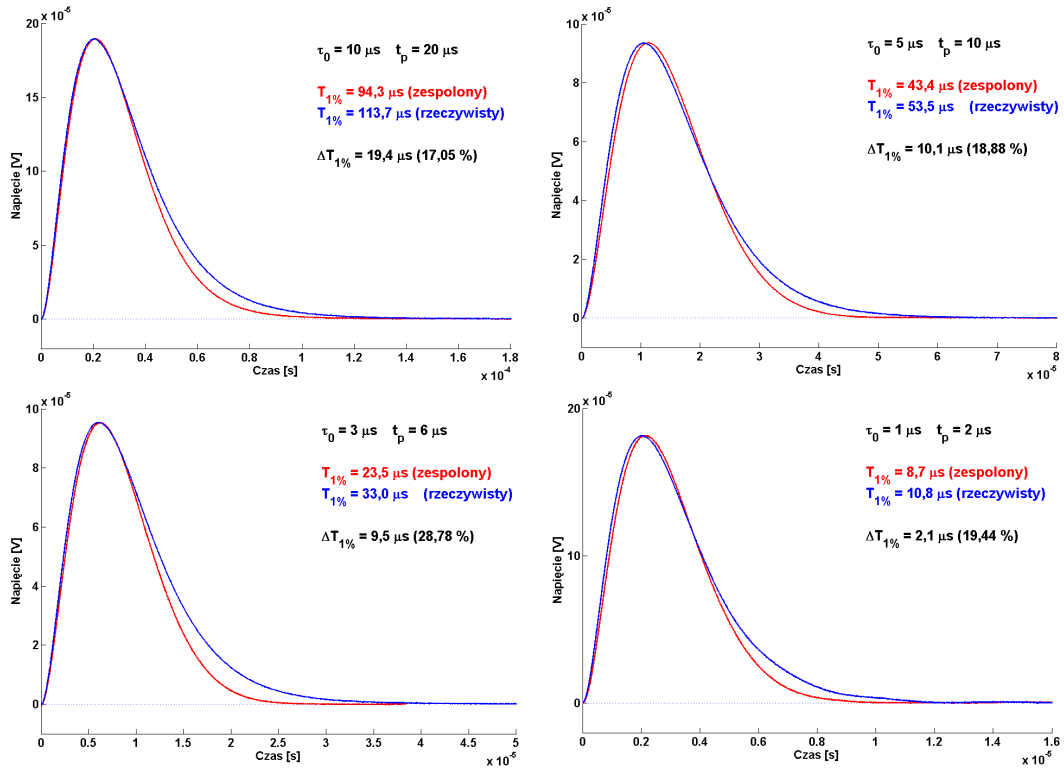


Rysunek 3.6. Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^4$ dla czasów kształtowania poniżej $1 \mu s$

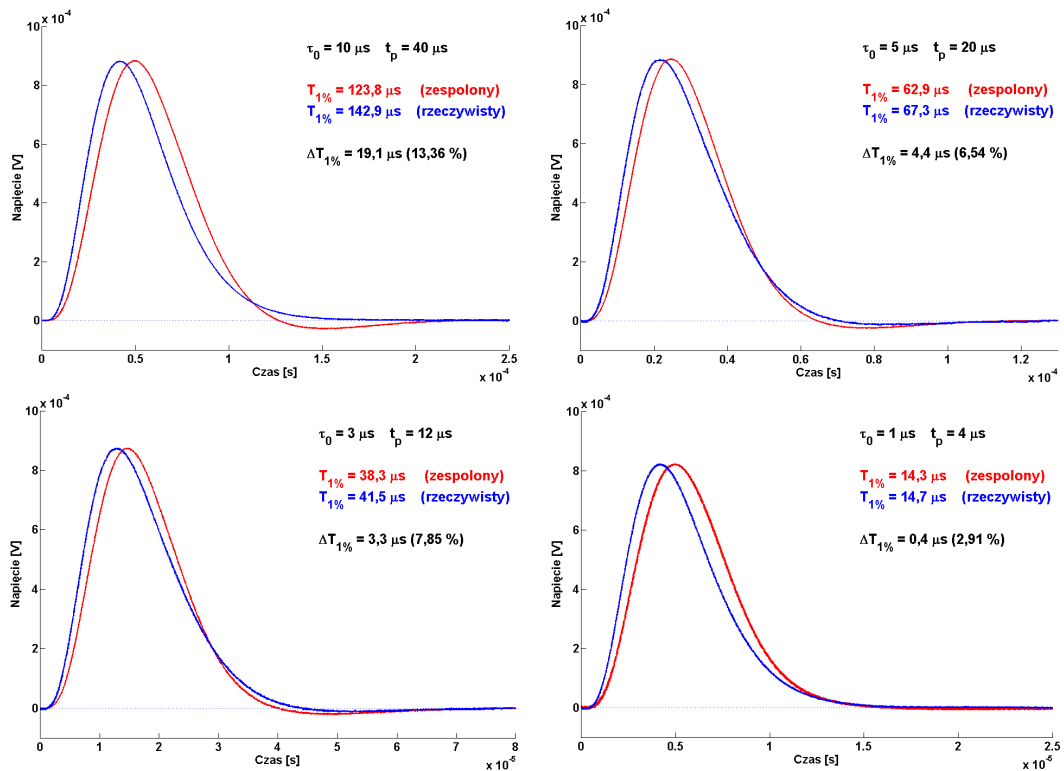
Na podstawie tych wykresów możemy stwierdzić, że dla krótkich czasów kształtowania układ przestaje pracować zgodnie z oczekiwaniami powodując wydłużenie się ogona impulsu.

3.2.1. Porównanie przebiegów czasowych

Analiza teoretyczna pokazała, że impulsy po filtrze zespolonym mają krótsze ogony od impulsów po odpowiadających im filtrach typu $CR - (RC)^p$. Podobnego efektu należy spodziewać się w pomiarach. Seria wykresów 3.7 oraz 3.8 przedstawia porównanie impulsów dla filtru rzeczywistego (kolor niebieski) i odpowiadających im impulsów dla filtru zespolonego (kolor czerwony). W ramkach na wykresach, obok stałej czasowej filtru podano również czasy trwania impulsów do osiągnięcia 1% amplitudy. Podano również zysk czasowy ($\Delta T_{1\%}$) na impulsie po filtrze z biegunami zespolonymi w odniesieniu do impulsów po filtrze z biegunami rzeczywistymi.



Rysunek 3.7. Porównanie impulsów dla filtra rzeczywistego i zespolonego rzędu 2



Rysunek 3.8. Porównanie impulsów dla filtra rzeczywistego i zespolonego rzędu 4

W tabeli 3.3 przedstawiono porównanie czasów trwania impulsów (w rozumieniu osiągnięcia przez impuls 1% swojej amplitudy) z wartościami teoretycznymi. Jak wynika z tabeli wartości zmierzone odpowiadają w granicach niepewności pomiarowej wartościom teoretycznym.

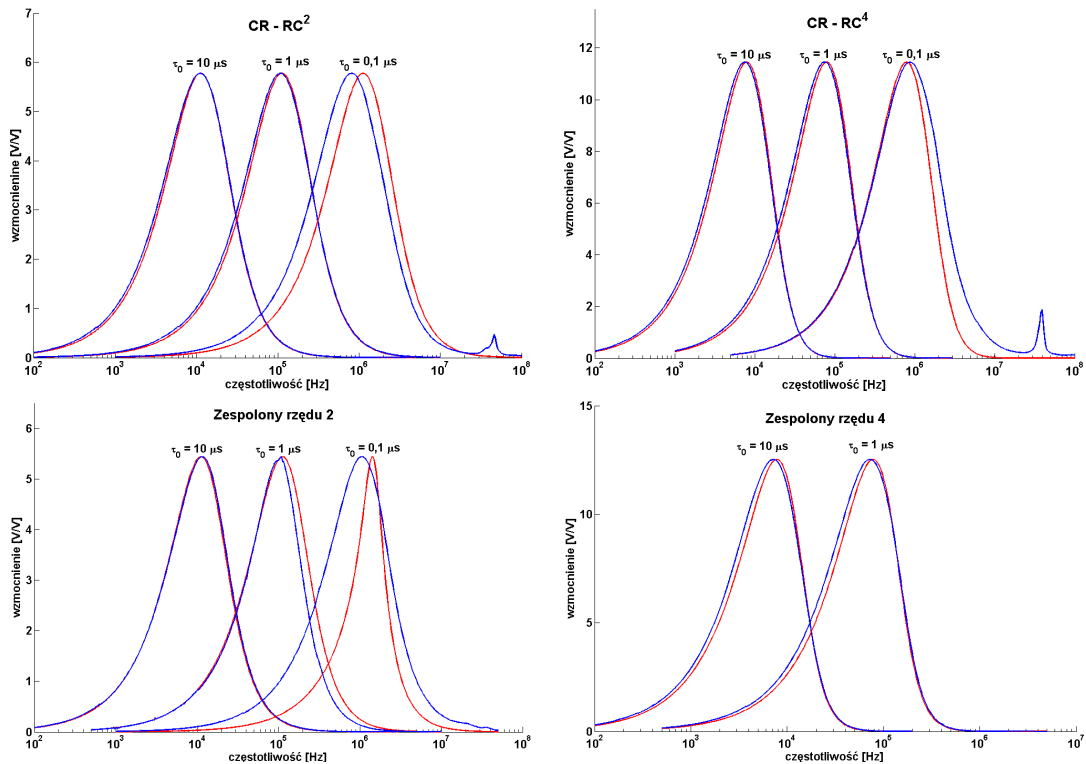
Tabela 3.3. Tabela porównawcza czasów trwania impulsów po filtrze zespolonym i rzeczywistym

	τ_0	Teoria			Pomiar		
		$T_{1\%}^R$ [μs]	$T_{1\%}^Z$ [μs]	Różnica [%]	$T_{1\%}^R$ [μs]	$T_{1\%}^Z$ [μs]	Różnica [%]
Rząd II	10 μs	97,8	82,8	15,33	113,7	94,3	17,05
	5 μs	48,9	41,4	15,33	53,5	43,4	18,88
	3 μs	29,3	24,8	15,35	33	23,5	28,78
	1 μs	9,7	8,3	14,43	10,8	8,7	19,44
Rząd IV	10 μs	134,4	122,6	8,79	142,9	123,8	13,36
	5 μs	67,3	61,3	8,91	67,3	62,9	6,54
	3 μs	40,4	36,8	8,91	41,5	38,3	7,85
	1 μs	13,5	12,3	8,88	14,7	14,3	2,91

Analiza tego typu wykresów wykazuje, że średni zysk czasowy przy filtracji zespolonej rzędu 2 wynosi ok. 20% w stosunku do filtracji rzeczywistej. Efektem praktycznym jest to, że stosując tego typu filtrację moglibyśmy budować elektronikę *front – end* nawet o 20% szybszą (w sensie średniej częstości mierzonych impulsów), co dla współczesnej elektroniki tego typu, pracującej w warunkach dużych natężeń promieniowania ma istotne znaczenie. Analiza teoretyczna pokazała, że dla wyższych rzędów filtrów zysk czasowy jest już zdecydowanie mniejszy.

3.2.2. Widma częstotliwościowe

Na czterech wykresach 3.9 przedstawiono widma częstotliwościowe filtrów wszystkich badanych typów. Kolorem niebieskim przedstawiono widma zmierzone a kolorem czerwonym widma teoretyczne wynikające z analizy wzorów.



Rysunek 3.9. Teoretyczne i zmierzone charakterystyki częstotliwościowe czterech rodzajów filtrów dla różnych czasów kształtowania

Analiza wykresów widm pokazuje dobrą zgodność pasma przenoszenia zbudowanego układu z teorią. Na powyższych wykresach zauważyć możemy również, podobnie jak to miało miejsce przy analizie wykresów odpowiedzi czasowych, że dla czasów kształtowania poniżej $1 \mu s$ układ przestaje zachowywać się zgodnie z teorią. Różnice dla submikrosekundowych czasów kształtowania są spowodowane tym, że na pasmo przenoszenia samego filtru nakłada się pasmo przenoszenia wzmacniaczy operacyjnych.

3.3. Filtracja szumów

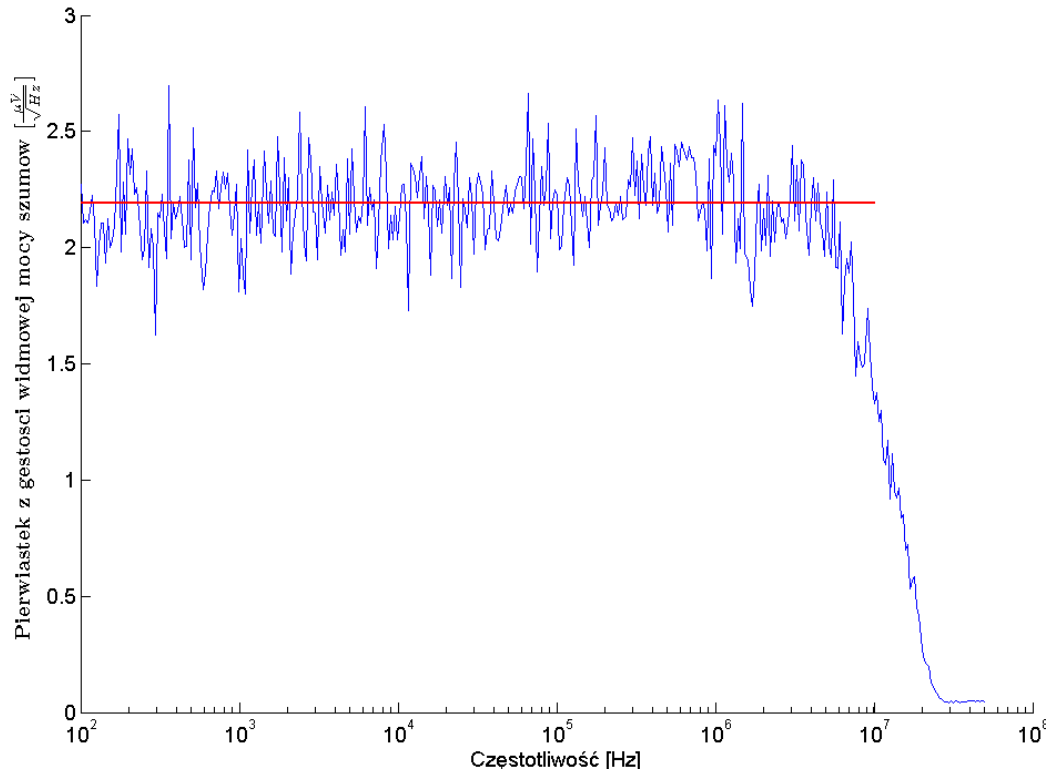
Sygnaly, jakie otrzymujemy z przedwzmacniacza obarczone są często dużymi szumami. Minimalizacja szumów przedwzmacniacza i detektora jest jednym z podstawowych celów elektroniki jądrowej. Poza formowaniem sygnału do postaci możliwej do zarejestrowania przez dalszą część elektroniki układy kształtujące mają również za zadanie filtrację szumów. Poniżej przedstawiono taką analizę i wnioski z niej płynące.

3.3.1. Filtracja szumów białych

W pierwszej części przeprowadzono pomiary filtracji szumów białych. Szumy o widmie częstotliwościowym przedstawionym na rysunku 3.10 podawane były z genera-

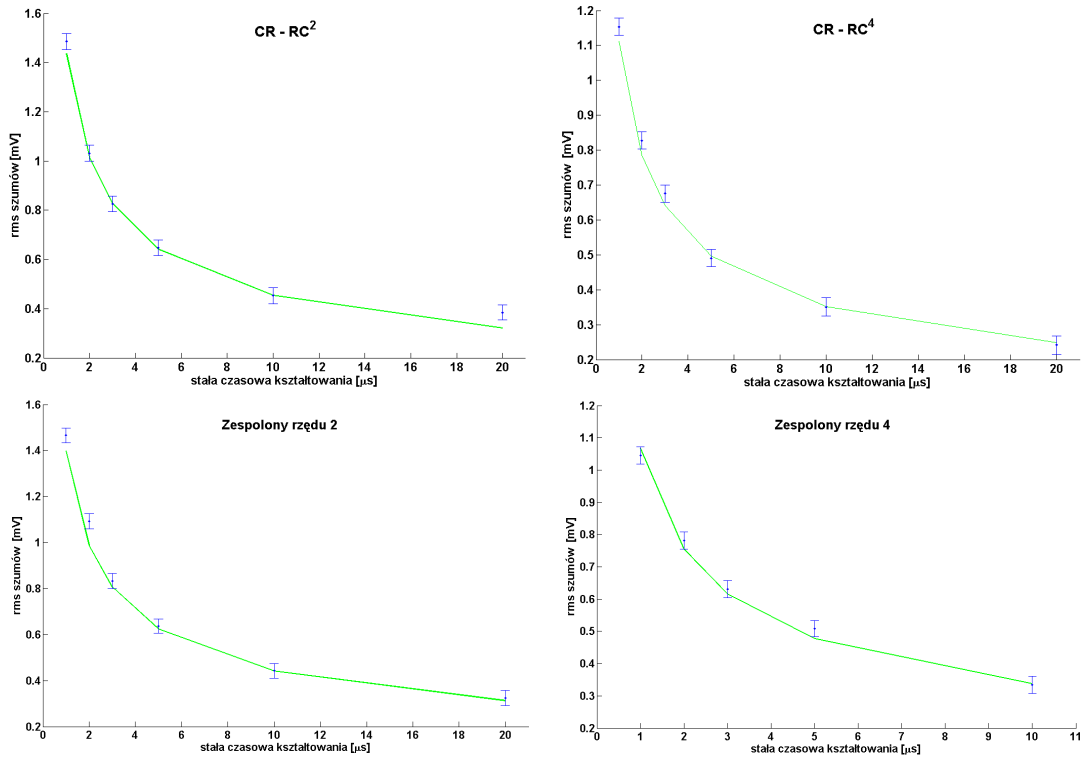
tora. Na rysunku dofitowano również wartość średnią szumów białych wykorzystywaną w późniejszych symulacjach. Wartość ta wynosi:

$$\frac{d\langle v_N^2 \rangle}{df} = 2,18 \frac{\mu V}{\sqrt{Hz}} . \quad (3.16)$$



Rysunek 3.10. Widmo szumów białych podawanych z generatora

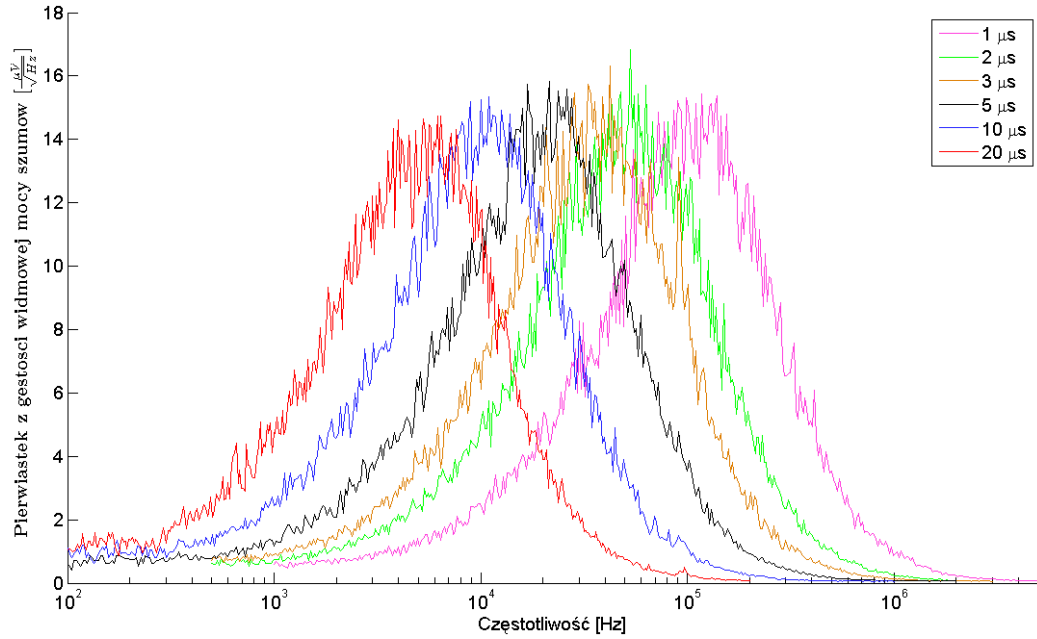
Na rysunku widać, że widmo szumów nie jest białe w całym mierzonym zakresie, ale kończy się przy częstotliwościach rzędu 10 MHz . Spowodowane jest to skończonym pasmem częstotliwości generatora. Jednak analizując pasma przenoszenia (rozdział 3.2.2) można uznać, że w całym zakresie używanych stałych czasowych, czyli do częstotliwości rzędu 1 MHz generowany szum jest biały. Na serii czterech wykresów 3.11 przedstawiono zależność *rms* szumów białych na wyjściu czterech różnych rodzajów filtrów od stałej czasowej kształtowania. Za stałą czasową kształtowania filtru zespolonego przyjęto stałą czasową kształtowania filtru rzeczywistego odpowiedniego rzędu.



Rysunek 3.11. Teoretyczna i zmierzona zależność *rms* szumów od stałej czasowej kształtowania dla czterech rodzajów filtracji

Na wszystkich rysunkach kolorem zielonym narysowano wartości teoretyczne *rms* szumów wyliczone przy pomocy symulacji komputerowej. Kolorem niebieskim natomiast pokazano wartości zmierzone przy pomocy analizatora widma HP-4195, przy czym aby wyznaczyć V_{rms} zmierzone widmo zostało scałkowane numerycznie w całym przedziale mierzonych częstotliwości. Jak widać zmierzone wartości bardzo dobrze pokrywają się z wartościami obliczonymi ze wzorów teoretycznych.

Na wykresie 3.12 przedstawiono przykład tego typu widma dla filtru $CR - (RC)^2$. Różnymi kolorami zaznaczono na nich widma szumowe odpowiadające różnym stałym czasowym kształtowania.



Rysunek 3.12. Widma szumów na wyjściu filtra $CR - (RC)^2$ dla różnych stałych czasowych kształtowania

Scałkowanie kwadratu każdego z rozkładów daje kwadrat sigmy szumów dla danej stałej czasowej. W ten sposób otrzymano niebieskie punkty na rysunkach 3.11. Niepewność tych obliczeń oszacowano tu na poziomie 5%, jako niepewność związaną z pomiarem (widzimy, że krzywe na wykresie 3.12 są bardzo poszarpane, co wpływa znacząco na wynik całkowania) oraz błąd samego całkowania numerycznego (metoda kwadratów).

Krzywą teoretyczną otrzymano podając na teoretyczną funkcję przenoszenia filtra $CR - (RC)^2$ określoną wzorem 2.107 szumy o rozkładzie widmowym opisanym empiryczną zależnością 3.16. W wyniku takiej operacji σ_{noise} szumów wyjściowych dana jest wzorem:

$$\sigma_{noise} = \sqrt{\int_0^{\infty} \frac{d\langle v_N^2 \rangle}{df} \left| \frac{j 2\pi f \tau}{(1 + j 2\pi f \tau)^3} \right|^2 df}, \quad (3.17)$$

gdzie pod wartością bezwzględną znajduje się funkcja przenoszenia filtra, a gęstość widmowa mocy szumów białych przed nią opisana jest wzorem 3.16. Podobne obliczenia przeprowadzono dla wszystkich rodzajów kształtowania. Wyniki tych obliczeń dla wykresów 3.11 pokazuje tabela 3.4.

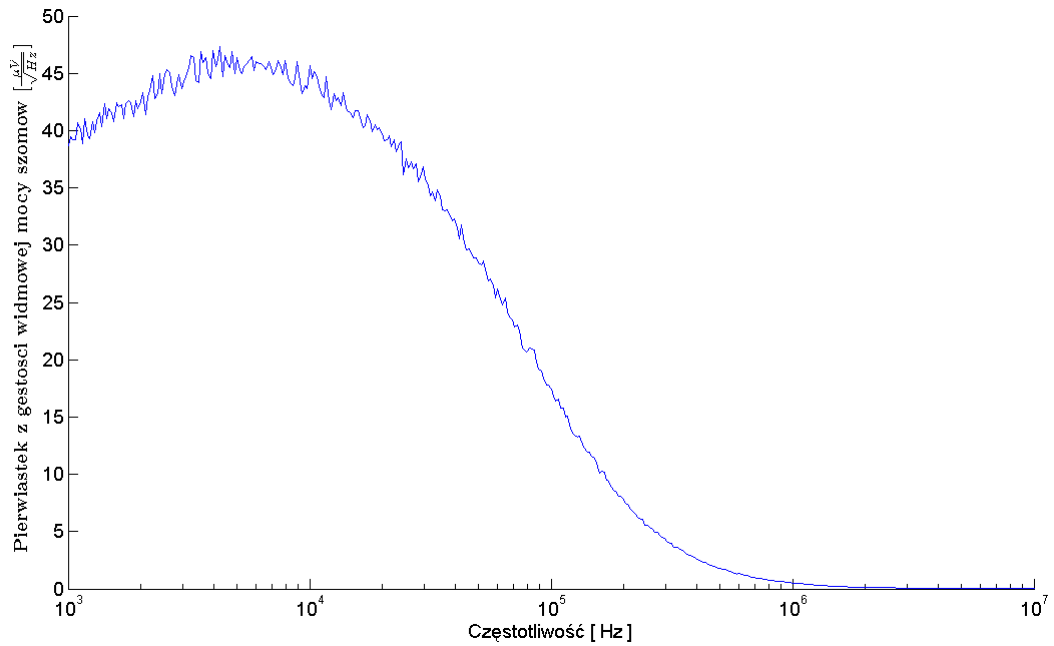
Tabela 3.4. Teoretyczne i zmierzone wartości sigmy szumów dla wszystkich czterech typów kształtowania (wszystkie wartości w tabeli podane są w jednostkach mV)

Filtr	$\tau =$	$1 \mu s$	$2 \mu s$	$3 \mu s$	$5 \mu s$	$10 \mu s$	$20 \mu s$
$CR - (RC)^2$	teoria	1,4356	1,0148	0,8285	0,6418	0,4538	0,3209
	pomiar	1,4855	1,0313	0,8254	0,6473	0,4526	0,3848
Zespolony 2	teoria	1,3982	0,9887	0,8072	0,6252	0,4421	0,3126
	pomiar	1,466	1,0928	0,8329	0,6366	0,4425	0,3241
$CR - (RC)^4$	teoria	1,1116	0,7859	0,6417	0,4971	0,3515	0,2485
	pomiar	1,1532	0,8277	0,6757	0,4908	0,3509	0,2418
Zespolony 4	teoria	1,0681	0,7552	0,6166	0,4776	0,3377	–
	pomiar	1,045	0,7821	0,6304	0,5083	0,3342	–

Z tabeli wynika, że ze wzrostem stałej czasowej kształtowania σ_{noise} szumów białych dla dowolnego filtra maleje. Jest to wniosek zgodny z oczekiwaniami. Szumy dla filtrów zespolonych są porównywalne do szumów dla filtrów rzeczywistych. Dla ustawionej wartości parametru σ dla filtra zespolonego, przy której był on porównywany do filtra rzeczywistego odpowiadającego rzędu jest to zgodne z oczekiwaniami, czego dowodem jest zgodność w granicach niepewności obliczeń teoretycznych z wartościami zmierzonymi. Warto zwrócić tu jeszcze raz uwagę na tabelę 2.2. W tabeli tej dla impulsów z tym samym *peaking time* szumy po filtrach zespolonych były również porównywalne, ewentualnie nieznacznie większe niż po odpowiadających im filtrach rzeczywistych.

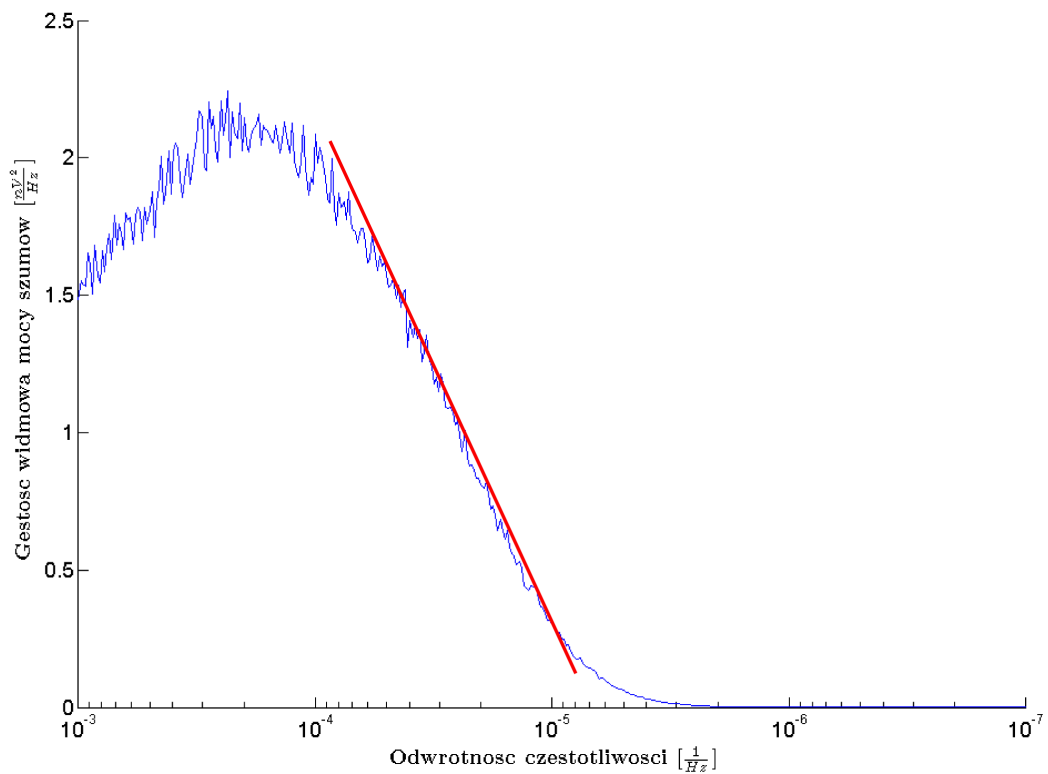
3.3.2. Filtracja szumów typu $\frac{1}{f}$

Analogicznie do poprzedniego podpunktu można sprawdzić jak się będzie zachowywał układ przy filtracji szumów typu $\frac{1}{f}$. W tym celu posłużono się generatorem szumu typu $\frac{1}{f}$, którego widmo przedstawiono na rysunku 3.13.



Rysunek 3.13. Widmo szumów typu 1/f podawanych z generatora

Ponieważ gęstość widmowa mocy tych szumów powinna być odwrotnie proporcjonalna do częstotliwości na rysunku 3.14 przedstawiono to samo widmo ale jako zależność gęstości widmowej od $\frac{1}{f}$.



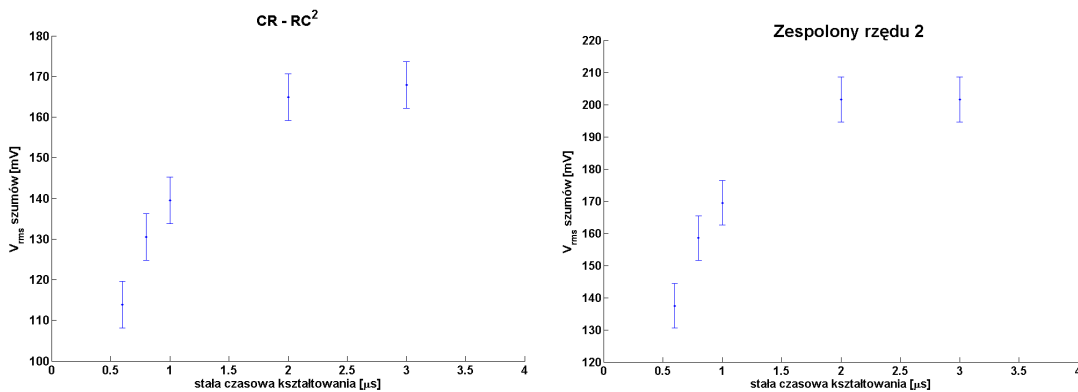
Rysunek 3.14. Zależność gęstości widmowej mocy szumów od odwrotności częstotliwości

Z wykresów widać, że widmo to nie jest idealne i z charakterystyką $\frac{1}{f}$ zgadza się tylko dla częstotliwości od $\sim 50 \text{ kHz}$ do $\sim 500 \text{ kHz}$. Zatem analizując pasma przenoszenia filtrów dla różnych stałych czasowych (wykresy 3.9) ograniczono tu analizę do czasu kształtowania $\tau \leq 3 \mu\text{s}$. Podobnie jak poprzednio, poniżej przedstawiono tabelę 3.5 ze zmierzonymi wartościami średniokwadratowymi mocy szumów dla różnych wartości τ .

Tabela 3.5. Zmierzone wartości sigm szumów na wyjściu filtru $CR - (RC)^2$ i filtru zespolonego rzędu 2 (wszystkie wartości w tabeli podane są w jednostkach mV)

Filtr	$0,6 \mu\text{s}$	$0,8 \mu\text{s}$	$1 \mu\text{s}$	$2 \mu\text{s}$	$3 \mu\text{s}$
$CR - (RC)^2$	113,82	130,52	139,53	164,89	167,98
Zespolony 2	137,48	158,53	169,46	201,58	201,61

Wyniki z tabeli przedstawione zostały na wykresach 3.15. Kolorem niebieskim zaznaczono tu punkty pomiarowe wynikające z całkowania kwadratu widma szumowego dla danej stałej czasowej.



Rysunek 3.15. Zmierzona zależność rms szumów od stałej czasowej kształtowania dla dwóch typów kształtowań: $CR - RC^2$ oraz zespolonego rzędu 2

Analiza tabeli 3.5 i wykresów 3.15 pokazuje wyraźnie, że wraz ze wzrostem stałej czasowej kształtowania rośnie wartość średniokwadratowa szumów. Jest to zgodne z oczekiwaniami dla szumów typu $\frac{1}{f}$, które dominują przy niskich częstotliwościach, czyli właśnie przy dłuższych stałych czasowych. Wykresy 3.13 i 3.14 pokazują jednak, że szумы podawane na wejściu układu nie były do końca szumami typu $\frac{1}{f}$ gdyż przy stałych czasowych większych od $1 \mu\text{s}$ V_{rms} szumów nasycza się, a przy jeszcze większych stałych czasowych wykazuje tendencje opadającą. Analiza wykresu 3.14 pozwala sądzić, że jest to zgodne z oczekiwaniami. Szum ten dla niskich częstotliwości zachowuje się jak szum biały.

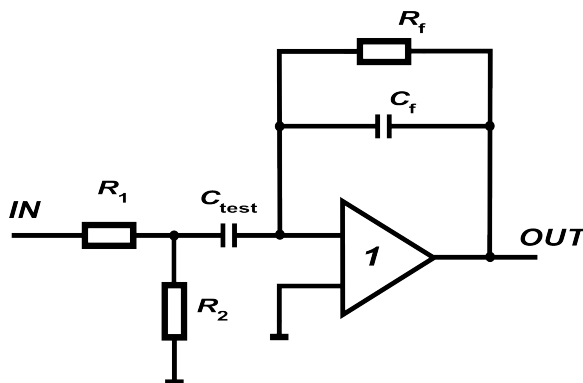
3.3.3. Filtracja szumów rzeczywistego wzmacniacza

Obliczenia i pomiary w poprzednim rozdziale przeprowadzone zostały osobno dla szumu białego i szumu typu $\frac{1}{f}$. Warto sprawdzić jak zachowywać się będzie układ, gdy na wejście podamy oba typy szumów. Skoro V_{rms} szumów białych maleje wraz ze wzrostem stałej czasowej kształtowania, a szumów typu $\frac{1}{f}$ rośnie to można się spodziewać, że przy porównywalnych wartościach średniokwadratowych szumów znajdziemy optymalną stałą czasową. Ze względu jednak na brak dostępu do odpowiedniego generatora szumów typu $\frac{1}{f}$ zdecydowano się tu na wykorzystanie rzeczywistego wzmacniacza ładunkowego zbudowanego w oparciu o układ AD8067 firmy Analog Devices (układ ten opisywany był już w rozdziale 2.3.3). Rozwiązanie to niestety uniemożliwia badanie filtracji samych szumów typu $\frac{1}{f}$, a wymusza konieczność badania filtracji wszystkich rodzajów szumów, jakie generuje wzmacniacz. Daje ono jednak możliwość wykonania pełnych obliczeń na ekwiwalentny ładunek szumowy całego układu przedwzmacniacz – filtr.

Schemat samego przedwzmacniacza przedstawiony został na rysunku 3.16. Widzimy tu wzmacniacz operacyjny z zapiętym pojemnościowo-rezystywnym sprzężeniem zwrotnym. Oprócz tego na rysunku widać układ podawania impulsów testowych. Składa się on z dzielnika napięcia zbudowanego na dwóch rezystorach $R_1 = 1\text{ k}\Omega$ i $R_2 = 100\ \Omega$ obniżającego napięcie wejściowe, oraz pojemności testowej $C_{test} = 0,8\text{ pF}$, zamieniającej skok napięcia na impuls prądowy w postaci delty Diraca na wejściu przedwzmacniacza o ładunku:

$$Q_{in} = U_{in} C_{test} \frac{R_2}{R_1 + R_2} = 453977,9 U_{in} e . \quad (3.18)$$

Stała czasowa samego układu całkującego przedwzmacniacza zrealizowana została przy pomocy równoległego połączenia rezystora $R_f \approx 1\text{ G}\Omega$ oraz kondensatora $C_f \approx 0,5\text{ pF}$ i wynosi $\tau_{wzm} \approx 50\ \mu\text{s}$.



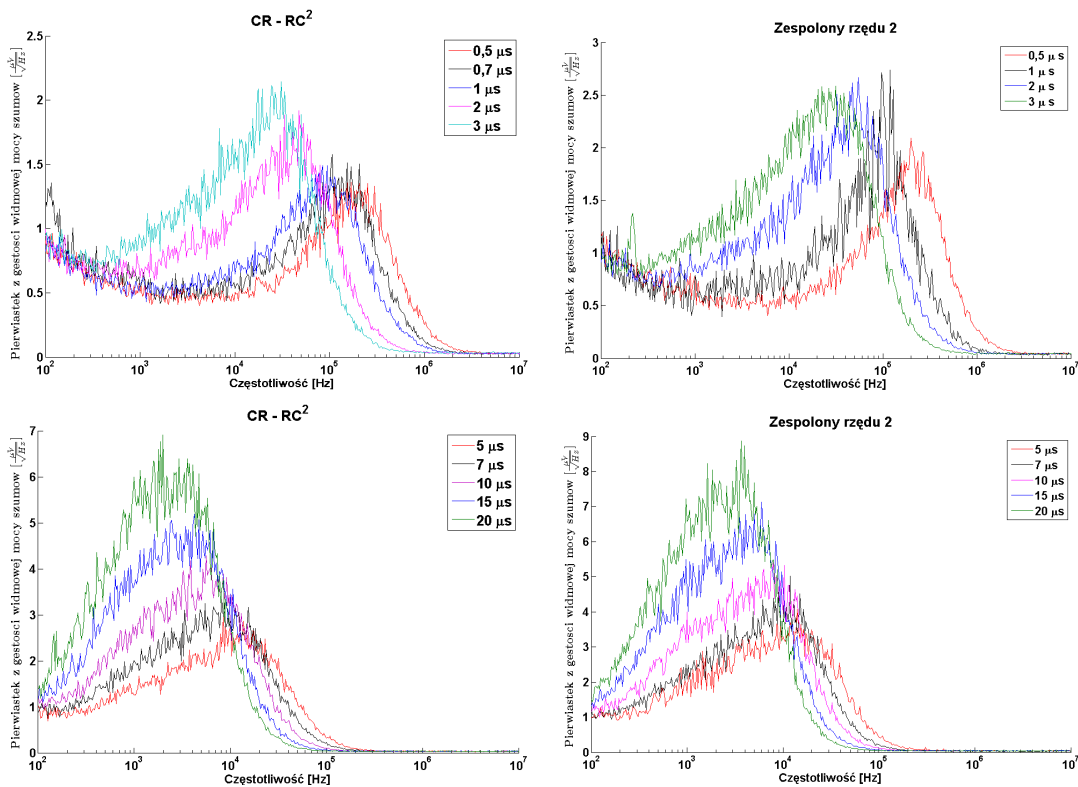
Rysunek 3.16. Schemat przedwzmacniacza ładunkowego

Aby badać wzmocnienie ładunkowe całego układu wzmacniacza i filtru, na wejście testowe przedwzmacniacza podawany był impuls w postaci skoku napięcia o amplitudzie $U_{in} \approx 50 \text{ mV}$. Zatem ładunek wstrzykiwany przez pojemność testową do przedwzmacniacza wynosił $Q_{in} = 22700 e$. Jest to w przybliżeniu ładunek generowany w standardowym detektorze półprzewodnikowym przez relatywistyczną cząstkę jonizującą. Znając średnią wartość napięcia szumów na wyjściu układu można wyliczyć ekwiwalentny ładunek szumowy.

$$ENC = \frac{\sigma_{noise} Q_{in}}{V_{out}^{max}} \quad (3.19)$$

Gdzie σ_{noise} jest napięciem V_{rms} szumów, a V_{out}^{max} maksymalną amplitudą sygnału na wyjściu całego układu. Jeżeli, podobnie jak wyżej, Q_{in} wyrazimy w elektronach to ekwiwalentny ładunek szumowy otrzymany również w elektronach.

Poniżej przedstawiono wyniki obliczeń i wnioski z nich płynące. Gęstości widmowe mocy szumów na wyjściu filtru typu zespolonego i rzeczywistego rzędu 2 przedstawione są na rysunkach 3.17.



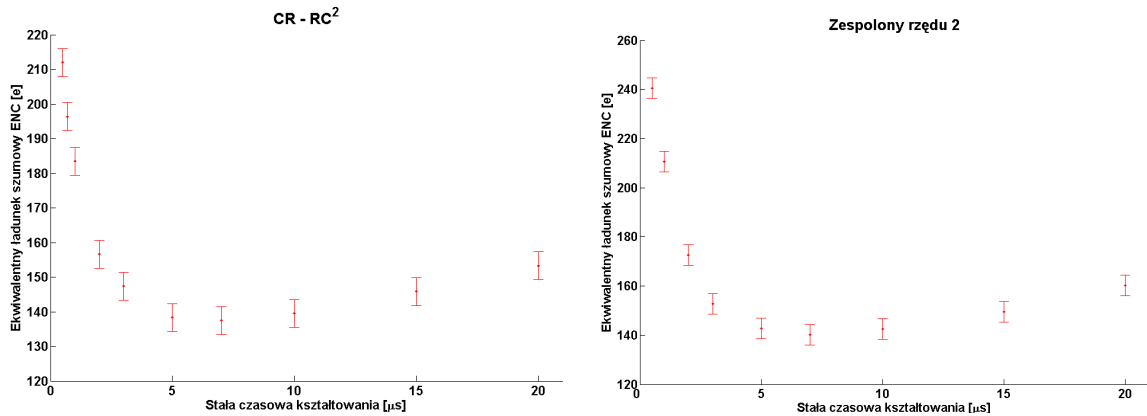
Rysunek 3.17. Zmierzone widma szumowe na wyjściu filtru typu $CR - RC^2$ oraz zespolonego rzędu 2 dla różnych stałych czasowych

Całkując powyższe widma podniesione do kwadratu otrzymujemy V_{rms}^2 szumów. Tabela 3.6 pokazuje obliczone wartości parametru szumowego σ , amplitudy impulsu wyjściowego V_{out}^{max} oraz ENC dla obu typów filtrów.

Tabela 3.6. Zmierzone wartości σ na wyjściu filtra z biegunami zespolonymi i rzeczywistymi

τ_0	$CR - (RC)^2$			Zespolony rzędu 2		
	V_{out}^{max} [mV]	σ_{noise} [mV]	ENC [mV]	V_{out}^{max} [mV]	σ_{noise} [mV]	ENC [mV]
0,5 μs	87	0,8125	211,9929	104,8	1,1108	240,59519
0,7 μs	83	0,7179	196,3474	–	–	–
1 μs	76,6	0,6191	183,4434	94,1	0,8734	210,67463
2 μs	76,8	0,5298	156,5984	101,5	0,7715	172,52618
3 μs	75,4	0,4895	147,3590	99,1	0,6669	152,75502
5 μs	75,6	0,4606	138,3055	105	0,6603	142,74249
7 μs	77,1	0,4669	137,4675	100,4	0,6195	140,06997
10 μs	76,5	0,4702	139,5235	99,7	0,6263	142,59127
15 μs	75,2	0,4833	145,8689	98	0,6458	149,59205
20 μs	76,3	0,5153	153,2894	94,6	0,6678	160,25949

Wartości ENC dla różnych stałych czasowych przedstawione zostały na dwóch wykresach 3.18. Kolorem czerwonym zaznaczone zostały tu poszczególne punkty pomiarowe wraz z ich niepewnościami. Jako niepewność pomiaru przyjęto tu 5% wartości. Niepewność ta związana jest z niedokładnością ustawiania stałych czasowych, z niepewnościami procesu zbierania widm oraz z błędem obliczania samej całki pod kwadratem gęstości widmowych mocy szumów na wyjściu układu (rysunki 3.17).



Rysunek 3.18. Zmierzona zależność ENC od stałej czasowej kształtowania dla dwóch rodzajów filtracji

Analiza tabeli 3.6 oraz wykresów 3.18 pokazuje, że zgodnie z oczekiwaniami istnieje optymalna stała czasowa kształtowania, dla której ekwiwalentny ładunek szumowy osiąga minimum. Dla obu typów kształtowania wynosi ona około $\tau = 7 (\pm 1) \mu s$. Wiedzimy, że wartość samego ENC jest podobna, chociaż dla kształtowania typu zespolonego jest ona o średnio 6% większa. Zgodnie z teorią z rozdziału 2.3.3 powinno być na

odwrot. Należy jednak zwrócić uwagę, że powyższa analiza przeprowadzona została dla szumów rzeczywistego wzmacniacza, który szumi wieloma rodzajami szumów, a w szczególności szumami typu $\frac{1}{f}$, które nie zostały ujęte w rozważaniach teoretycznych. Najprawdopodobniej nieuwzględnienie tych szumów jest powodem nieznacznych rozbieżności między praktyką a teorią.

Dla znalezionej minimum ENC można policzyć przybliżoną wartość parametrów szumowych a i b (patrz rozdział 2.3.2). Zgodnie z teorią (wzór 2.111 przekształcony do postaci wyrażającej ekwiwalentny ładunek szumowy) ekwiwalentny ładunek szumowy dla filtru $CR - (RC)^2$ wyraża się wzorem:

$$ENC = \frac{e^2}{8} \sqrt{\frac{aC^2}{\tau} + 3b\tau}, \quad (3.20)$$

gdzie:

C jest pojemnością wejściową przedwzmacniacza

τ jest stałą czasową kształtowania

Tak wyrażone ENC przyjmuje wartość minimalną dla stałej czasowej:

$$\tau = \sqrt{\frac{a}{3b}} C. \quad (3.21)$$

Rozwiązując równanie 3.20 dla warunku 3.21 otrzymujemy:

$$\sqrt{a} = \frac{4\sqrt{2} ENC \sqrt{\tau}}{e^2 C} \quad (3.22)$$

$$\sqrt{b} = \frac{4\sqrt{\frac{2}{3}} ENC}{e^2 \sqrt{\tau}} \quad (3.23)$$

Przyjmując, że dla powyższych pomiarów minimum ekwiwalentnego ładunku szumowego równego $ENC_{min} = 137,5 (\pm 3,4) e$ przypada na $\tau = 7 (\pm 1) \mu s$ otrzymujemy parametry szumowe:

$$\sqrt{a} = 8,9 (3,6) \frac{nV}{\sqrt{Hz}} \quad (3.24)$$

$$\sqrt{b} = 3,4 (0,3) \frac{fA}{\sqrt{Hz}} \quad (3.25)$$

W obliczeniach tych przyjęto, że pojemność wejściowa przedwzmacniacza będąca sumą pojemności sprzężenia zwrotnego, pojemności testowej i pojemności tranzystora wejściowego samego wzmacniacza wynosi $C = 5 (\pm 2) pF$. Niepewności parametrów szumowych zostały obliczone posługując się prawem przenoszenia niepewności, przy pomocy wzorów:

$$\sigma(\sqrt{a}) = \sqrt{\left(\frac{\partial a}{\partial ENC}\sigma(ENC)\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial C}\sigma(C)\right)^2 + \left(\frac{\partial a}{\partial \tau}\sigma(\tau)\right)^2} \quad (3.26)$$

$$\sigma(\sqrt{b}) = \sqrt{\left(\frac{\partial b}{\partial ENC}\sigma(ENC)\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial C}\sigma(C)\right)^2 + \left(\frac{\partial b}{\partial \tau}\sigma(\tau)\right)^2} \quad (3.27)$$

Wartości podawane przez producenta dla wzmacniacza AD8067 to:

$$\sqrt{a} = 6,6 \frac{nV}{\sqrt{Hz}} \quad (3.28)$$

$$\sqrt{b} = 0,6 \frac{fA}{\sqrt{Hz}} \quad (3.29)$$

Z danych tych wynika, że zmierzone szumy napięciowe przedwzmacniacza są w granicach niepewności porównywalne do wartości podawanych przez producenta. Szumy prądowe zaś są kilkakrotnie większe. Spowodowane jest to dodatkowymi źródłami szumów prądowych pochodzącymi od innych elementów w układzie. Najbardziej szumiącym elementem w układzie poza tranzystorem wejściowym przedwzmacniacza jest rezystor rozładowujący sprzężenia zwrotnego. Pod względem szumowym zachowuje się on jak równoległe źródło szumów prądowych. Gęstość widmowa tych szumów opisana jest zależnością Nyquista (rozdział 1.1):

$$\frac{d\langle i_T^2 \rangle}{df} = 4kT \frac{1}{R} . \quad (3.30)$$

Dla rezystancji $R_f \approx 1 \text{ G}\Omega$ pierwiastek gęstości widmowej mocy szumów prądowych przez nią generowanych wynosi:

$$\frac{d\langle i_T^2 \rangle}{df} = 3,7 \frac{fA}{\sqrt{Hz}} . \quad (3.31)$$

Jeżeli założymy szumy przedwzmacniacza takie jak podane w specyfikacji czyli $\sqrt{b} = 0,6 \frac{fA}{\sqrt{Hz}}$, to po uwzględnieniu, że nieskorelowane szumy dodaje się w kwadracie otrzymujemy parametr opisujący pierwiastek z całkowitej gęstości widmowej szumów prądowych w układzie:

$$\sqrt{b} = \sqrt{3,7^2 + 0,6^2} = 3,8 \frac{fA}{\sqrt{Hz}} . \quad (3.32)$$

Wartość ta jest o $\sim 10\%$ wyższa od mierzonej wartości parametru \sqrt{b} . Różnica ta najprawdopodobniej spowodowana jest tym, że rezystancja R_f była większa niż tu założono.

Ogólnie można stwierdzić, że wyniki pomiaru zgadzają się z wartościami teoretycznymi. Zgodność ta potwierdza poprawność dokonanych pomiarów i przeprowadzonych obliczeń teoretycznych.

Podsumowanie pracy

W pracy przedstawiono teoretyczne podstawy detekcji promieniowania jonizującego oraz ekstrakcji sygnału generowanego w detektorze półprzewodnikowym. Po krótko omówiono proces generacji sygnału w detektorze półprzewodnikowym, który stanowi dioda typu $p - n$ spolaryzowana zaporowo (rozdział 2.1), oraz dokonano analizy poszczególnych elementów toru odczytowego (patrz rozdział 2) czyli przedwzmacniacza ładunkowego (podrozdział 2.2) i układu filtrującego – kształtującego (podrozdział 2.3). Następnie zbudowano i przetestowano układ filtrujący o specyficznych parametrach.

Przy analizie przedwzmacniacza ładunkowego skupiono się głównie na szumach przez niego generowanych. W rozdziale 2.2 wykazano, że:

- szумы przedwzmacniacza generowane są głównie przez jego tranzystor wejściowy
- szумы kanału tranzystora wejściowego przedwzmacniacza przenoszą się na wejście układu jako dwa skorelowane, ekwiwalentne źródła szumowe zgodnie ze wzorem 2.62 (rozdział 2.2)
- wzmacniacze zbudowane na jednym tranzystorze wejściowym generują szum o $\sqrt{2}$ mniejszy niż wzmacniacze z podwójnym wejściem czyli wzmacniacze operacyjne (wzór 2.36)
- szum generowany przez przedwzmacniacz przenosi się na jego wyjście zgodnie ze wzorem A.5
- uproszczenie wzoru A.5 przy założeniu względnie małych częstotliwości pracy przedwzmacniacza prowadzi do znanego w literaturze wzoru 2.65. Zgodność tego wzoru z literaturą [3], [4] i [6] pozwala sądzić o prawidłowości rozumowania przeprowadzonego w rozdziale 2.2 i załączniku A

Analizę części filtrującej układu rozpoczęto od wyprowadzenia transmittancji dopasowanego filtra optymalnego (wzór 2.84) oraz jej uproszczenia przy założeniu, że szумы wejściowe filtra są szumami białymi (wzór 2.86). Pokazano również przykład realizacji prefiltru wybielającego prowadzącego do spełnienia tego warunku (schemat 2.23 oraz wzór 2.93).

W dalszej części rozdziału 2.3 pokazano różne, realizowalne w praktyce techniki filtracji (podrozdział 2.3.2), takie jak:

- filtry typu $CR - (RC)^p$
- filtr trójkątny
- filtry o biegunach zespolonych

Dla filtrów tych, tam gdzie było to możliwe pokazano analityczne wzory na funkcje

przenoszenia oraz wyprowadzono formuły na σ_{noise} szumów i na stosunek sygnału do szumu. Dla wszystkich filtrów pokazano również przykład realizacji w praktyce.

W podrozdziale 2.3.3 pokazano porównanie zaprezentowanych technik filtracji w odniesieniu do filtru optymalnego. Tabela 2.2 zawiera względne wartości parametru SNR oraz czasy trwania impulsu po różnych filtrach przy założeniu stałego *peaking time* impulsu dla odpowiednich rzędów, a tabela 2.4 przy założeniu stałego czasu trwania impulsu $T_{0,1\%} = 1 \mu s$. Główny wniosek płynący z obu tabel to taki, że przy założeniu stałego *peaking time* impulsu filtry o biegunach zespolonych charakteryzują się porównywalnymi do filtrów $CR - (RC)^p$ stosunkami sygnału do szumu ale impulsy z nich wychodzące są nawet o 30% krótsze. Założenie stałego czasu trwania impulsów daje na wyjściu układu z filtracją zespoloną szumy nawet o 20% mniejsze niż na wyjściu układu z filtracją typu $CR - (RC)^p$.

Na końcu podrozdziału 2.3.3, dla różnych technik filtracji pokazano wartości szumów (wyrażone jako ekwiwalentny ładunek szumowy) oraz ich względny przyrost (względem filtracji typu $CR - RC$) dla różnych wartości gęstości widmowych mocy szumów prądowych i napięciowych. Analiza wykresów od 2.31 do 2.35 prowadzi do ogólnego wniosku, że zysk na ekwiwalentnym ładunku szumowym dla filtrów pseudo-gaussowskich o biegunach zespolonych zależy silnie od szumów prądowych i napięciowych i przy odpowiednim ich stosunku może wynosić nawet 20%.

Rozdział 2.3.3 pokazuje, że w niektórych przypadkach filtry z biegunami zespolonymi są o wiele wydajniejsze (w znaczeniu filtracji szumów i czasu trwania impulsów) niż ich odpowiedniki z biegunami rzeczywistymi. Należy zwrócić tu jednak uwagę na fakt, że w szczególnych przypadkach (przy odpowiednich stosunkach szumów prądowych do napięciowych) filtracja ta wykazuje gorsze właściwości. Pobieżna analiza schematów 2.29 i 2.26 pozwala sądzić, że pobór mocy obu typów filtracji jest podobny, zatem decyzja o zastosowaniu danego rozwiązania (filtracji rzeczywistej czy zespolonej) powinna zapaść w momencie projektowania przedwzmacniacza, gdy znamy już przybliżone wartości szumów wejściowych.

W rozdziale 3 przedstawiono projekt i wyniki testów nietypowego rozwiązania filtru. Zaprojektowany został on tak, że dawał możliwość ustawiania biegunów zespolonych i rzeczywistych rzędu 2 i 4. Rozwiązanie takie dało możliwość porównania impulsów wyjściowych (podrozdział 3.2) oraz właściwości filtracyjnych (podrozdział 3.3) obu typów kształtowania przy zachowaniu tego samego rzędu filtru. Wnioski płynące z rozdziału 3 są następujące:

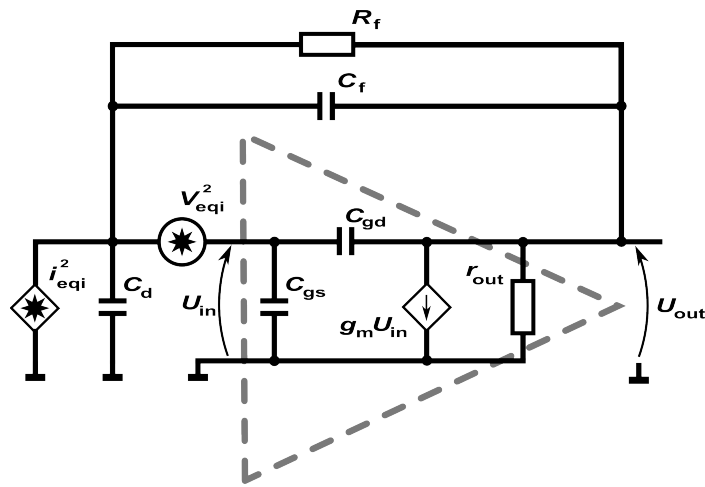
1. przy porównaniach przebiegów czasowych (podrozdział 3.2.1):
 - a. kształty impulsów wyjściowych zgadzają się z kształtami teoretycznymi zarówno dla filtracji rzeczywistej jak i zespolonej (wykresy od 3.2 do 3.5)
 - b. dla filtracji z czasem kształtowania poniżej $1 \mu s$ impulsy wyjściowe przestają

- zgodzać się z teorią. Wynika to z ograniczonej szybkości działania wzmacniaczy i buforów zastosowanych w układzie (wykresy 3.6)
- c. impulsy po filtrach zespolonych rzędu 2 są średnio o 20% krótsze niż po filtrach rzeczywistych tego samego rzędu (wykresy 3.7 i 3.8)
 - d. podobnie jak zmierzone kształty impulsów zgadzają się z teorią, tak i widma częstotliwościowe w rozdziale 3.2.2 pozwalają wnioskować o poprawności wykonania układu
2. przy analizie szumowej w podrozdziale 3.3.3:
- a. zarówno dla szumów białych jak i szumów typu $\frac{1}{f}$ filtry zachowują się zgodnie z oczekiwaniami, to znaczy dla szumów białych wartość V_{rms} maleje wraz ze wzrostem stałej czasowej kształtowania, a dla szumów typu $\frac{1}{f}$ rośnie.
 - b. tabele w podrozdziałach 3.3.1 i 3.3.2 pokazują zgodność zmierzonych szumów z wartościami teoretycznymi.
 - c. analiza filtracji szumów z rzeczywistego wzmacniacza (podrozdział 3.3.3) pokazuje, że:
 - zgodnie z oczekiwaniami istnieje optymalna stała czasowa kształtowania dla której ekwiwalentny ładunek szumowy przyjmuje minimum
 - pośrednio zmierzone wartości gęstości widmowej mocy szumów przedwzmacniacza są porównywalne i zgadzają się w granicach niepewności pomiarowej z wartościami podanymi przez producenta dla zastosowanego przedwzmacniacza (obliczenia na końcu tego podrozdziału)

Celem pracy było dokonanie przeglądu różnych technik ekstrakcji sygnału z detektora promieniowania jonizującego jakim jest detektor półprzewodnikowy. W wyniku przeprowadzonej analizy teoretycznej i pomiarów zbudowanego układu pokazano w sposób teoretyczny i praktyczny własności kształtowania filtrów pseudogaussowskich z biegunami zespolonymi, oraz wykazano ich przewagę (pod pewnymi założeniami) nad standardowo stosowanym we współczesnej elektronice *front – end* kształtowaniem typu $CR - (RC)^p$.

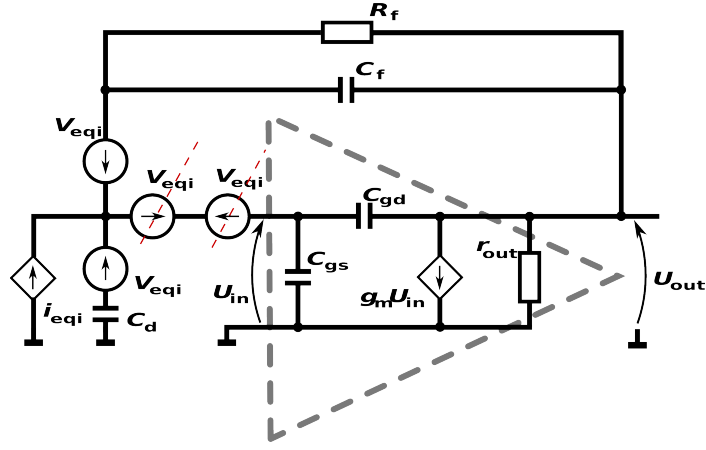
A. Dokładne wyliczenie szumów ekwiwalentnych przedwzmacniacza ładunkowego

Aby obliczyć szum wyjściowy generowany przez ekwiwalentne źródła szumowe należy rozwiązać układ przedstawiony na rysunku A.1.



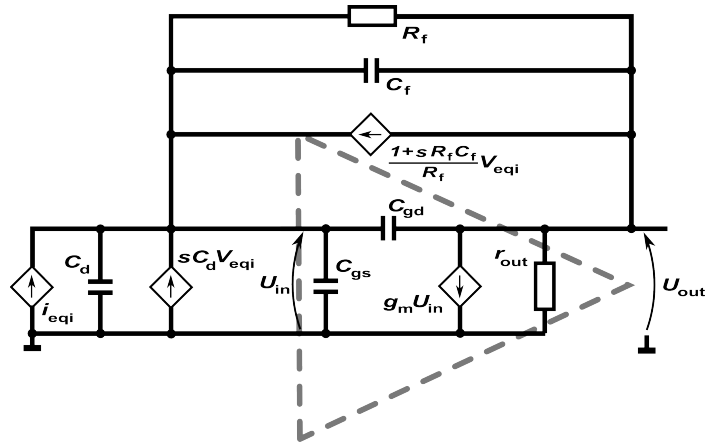
Rysunek A.1. Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowym

Można to zrobić na wiele sposobów. Jednym z nich jest metoda napięć węzłowych. Aby móc ją zastosować potrzeba zamienić szumowe źródło napięciowe na źródło prądowe. W tym celu korzystamy z twierdzenia, że dodanie do wszystkich gałęzi danego węzła takich samych źródeł napięciowych skierowanych w jednym kierunku względem tego węzła nie zmienia rozplywu prądu w gałęziach układu. Schemat A.1 możemy przerysować tak jak to zostało przedstawione na rysunku A.2



Rysunek A.2. Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowymi po zastąpieniu jednego źródła napięciowego kilkoma

Na schemacie tym czerwonym kolorem zaznaczono źródła napięciowe, które w wyniku tej operacji kompensują się. Aby zamienić pozostałe źródła napięciowe na źródła prądowe zauważamy, że oba źródła napięciowe są w szeregowo połączone z impedancjami. Korzystając z twierdzenia Nortona układ z rysunku A.2 przerysowujemy do następującej postaci.



Rysunek A.3. Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowymi po zastosowaniu twierdzenia Nortona

Można teraz zapisać macierz napięć węzłowych:

$$\begin{aligned}
 & \begin{bmatrix} s(C_{gd} + C_{gs} + C_d) + \frac{1+sC_fR_f}{R_f} & -sC_{gd} - \frac{1+sC_fR_f}{R_f} \\ -sC_{gd} - \frac{1+sC_fR_f}{R_f} & sC_{gd} + \frac{1+sC_fR_f}{R_f} + \frac{1}{r_{out}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{in} \\ U_{out} \end{bmatrix} = \\
 & \begin{bmatrix} i_{eqi} + v_{eqi}(sC_d + \frac{1+sC_fR_f}{R_f}) \\ -g_m U_{in} - v_{eqi} \frac{1+sC_fR_f}{R_f} \end{bmatrix} \quad (A.1)
 \end{aligned}$$

Przenosimy zmienną U_{in} z prawej strony równania na lewą i otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} s(C_{gd} + C_{gs} + C_d) + \frac{1+sC_fR_f}{R_f} & -sC_{gd} - \frac{1+sC_fR_f}{R_f} \\ -(sC_{gd} + \frac{1+sC_fR_f}{R_f} - g_m) & sC_{gd} + \frac{1+sC_fR_f}{R_f} + \frac{1}{r_{out}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{in} \\ U_{out} \end{bmatrix} = \\ = \begin{bmatrix} i_{eqi} + v_{eqi}(sC_d + \frac{1+sC_fR_f}{R_f}) \\ -v_{eqi} \frac{1+sC_fR_f}{R_f} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (A.2)$$

Obliczając wyznacznik główny i wyznacznik dla drugiej zmiennej czyli U_{out} (wyznacznik macierzy po zastąpieniu drugiej kolumny kolumną z prawej strony równania A.2) otrzymujemy pełną formułę na napięcie wyjściowe układu A.1:

$$\begin{aligned} U_{out} = v_{eqi} \frac{-(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)Z_f+(sC_{gd}+Z_f-g_m)(sC_d+Z_f)}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} + \\ + i_{eqi} \frac{(sC_{gd}+Z_f-g_m)}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} \end{aligned} \quad (A.3)$$

Aby uwidocznić wynik w równaniu tym zamiast równoległego połączenia pojemności C_f i rezystancji R_f podstawiono nową zmienną Z_f ($\frac{1+sC_fR_f}{R_f} = Z_f$). Otrzymaliśmy pełne równanie na napięcie wyjściowe. Ponieważ źródła szumowe v_{eqi} i i_{eqi} są w stu procentach skorelowane (zgodnie ze wzorem 2.54) można wzór A.3 przepisać do postaci:

$$\begin{aligned} U_{out} = v_{eqi} \left(\frac{-(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)Z_f+(sC_{gd}+Z_f-g_m)(sC_d+Z_f)}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} + \right. \\ \left. + \frac{(sC_{gd}+Z_f-g_m)(s(C_{gs}+C_{gd}))}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} \right) \end{aligned} \quad (A.4)$$

Dla szumów równanie to wygląda następująco:

$$\begin{aligned} U_{out}^2 = v_{eqi}^2 \left| \frac{-(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)Z_f+(sC_{gd}+Z_f-g_m)(sC_d+Z_f)}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} + \right. \\ \left. + \frac{(sC_{gd}+Z_f-g_m)(s(C_{gs}+C_{gd}))}{(s(C_{gd}+C_{gs}+C_d)+Z_f)\left(sC_{gd}+Z_f+\frac{1}{r_{out}}\right)-(sC_{gd}+Z_f)(sC_{gd}+Z_f-g_m)} \right|^2 \end{aligned} \quad (A.5)$$

Aby wynik stał się bardziej czytelny można dokonać tu pewnych uproszczeń:

- rezystancja wyjściowa przedwzmacniacza jest nieskończona ($r_{out} \rightarrow \infty$)
- rezystancja rozładowująca sprzężenia zwrotnego dąży do nieskończoności ($R_f \rightarrow \infty$, a co za tym idzie $Z_f = \frac{1+sC_fR_f}{R_f} \rightarrow C_f$)

— w formule $sC_{gd} + Z_f - g_m$ pojemność C_{gd} i impedancja Z_f są do zaniedbania
 $(sC_{gd} + Z_f - g_m \approx -g_m)$

W efekcie otrzymujemy:

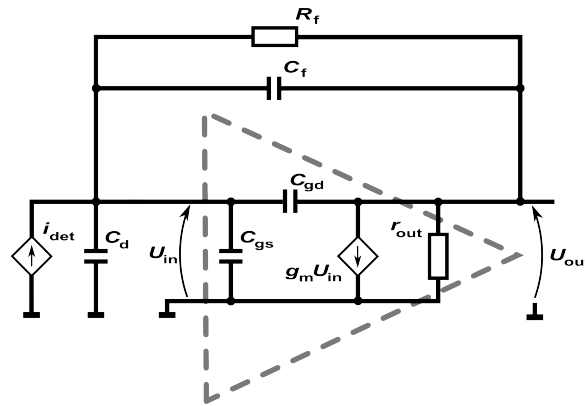
$$U_{out}^2 = v_{eqi}^2 \left| \frac{s^2(C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f)C_f + (C_d + C_f)g_m + g_m(s(C_{gs} + C_{gd}))}{s^2(C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f)(C_{gd} + C_f) + s(C_{gd} + C_f)g_m} \right|^2. \quad (A.6)$$

Jeżeli założymy teraz, że iloczyny dowolnych pojemności są do pominięcia w porównaniu do iloczynów pojemności i transkonduktancji to otrzymamy:

$$U_{out}^2 = \left| \frac{C_{gd} + C_{gs} + C_d + C_f}{C_{gd} + C_f} \right|^2 v_{eqi}^2. \quad (A.7)$$

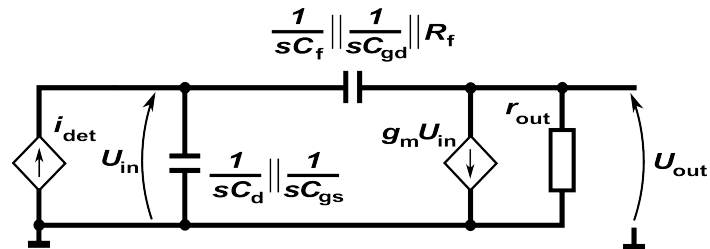
B. Odpowiedź wzmacniacza ładunkowego na wymuszenie prądowe

Poniżej przedstawiono schemat układu do liczenia odpowiedzi wzmacniacza ładunkowego na wymuszenie prądowe. Na schemacie zaznaczono wszystkie elementy wzmacniacza, które były brane pod uwagę w obliczeniach.



Rysunek B.1. Układ do liczenia odpowiedzi prądowej przedwzmacniacza ładunkowego

Jak widzimy ze schematu w obliczeniach uwzględniono pojemności tranzystora wejściowego przedwzmacniacza oraz pojemność sprzężenia zwrotnego i pojemność detektora. Oprócz tego obliczenia zawierają w sobie również rezystancję rozładującą sprzężenia zwrotnego oraz rezystancję wyjściową przedwzmacniacza. Schemat układu można przerysować do następującej postaci.



Rysunek B.2. Uproszczony układ do liczenia odpowiedzi prądowej przedwzmacniacza ładunkowego

Analizę tego układu przeprowadzono przy pomocy metody napięć węzłowych. Pełne równanie macierzowe tego układu przedstawione jest poniżej.

$$\begin{bmatrix} s(C_d + C_{gs}) + \frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} & -\frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} \\ -\frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} & \frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} + \frac{1}{r_{out}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{in} \\ U_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{det} \\ -g_m U_{in} \end{bmatrix} \quad (\text{B.1})$$

Przenosząc zmienną U_{in} z prawej strony równania na lewą otrzymujemy:

$$\begin{bmatrix} s(C_d + C_{gs}) + \frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} & -\frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} \\ -\frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} + g_m & \frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} + \frac{1}{r_{out}} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} U_{in} \\ U_{out} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} i_{det} \\ 0 \end{bmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Liczymy wyznacznik główny tej macierzy oraz jej drugi wyznacznik pomocniczy (wyznacznik macierzy po zastąpieniu drugiej kolumny kolumną z prawej strony równania) i otrzymujemy wynik na napięcie wyjściowe U_{out} spowodowane wymuszeniem prądowym i_{det} :

$$U_{out} = \frac{i_{det} (Z_f - g_m)}{(s(C_d + C_{gs}) + Z_f) \left(Z_f + \frac{1}{r_{out}} \right) + Z_f (g_m - Z_f)} \quad (\text{B.3})$$

Ponieważ wynik nie mieścił się w jednej linii podstawiono tu zamiast równoległego połączenia kondensatorów C_f , C_{gd} i rezystora R_f nową zmienną Z_f ($\frac{s(C_f + C_{gd})R_f + 1}{R_f} = Z_f$)

Powyższy wzór jest dokładnym wyliczeniem odpowiedzi przedwzmacniacza ładunkowego w konfiguracji z rysunku B.2 na wymuszenie prądowe. Zakładając nieskończoną rezystancję wyjściową r_{out} i rezystancję sprzężenia zwrotnego R_f dochodzimy do uproszczonego wzoru:

$$U_{out} = \frac{i_{det} (s(C_f + C_{gd}) - g_m)}{s^2(C_d + C_{gs} + C_f + C_{gd})(C_f + C_{gd}) + s(C_f + C_{gd}) (g_m - s(C_f + C_{gd}))} \quad (\text{B.4})$$

Zakładamy następnie, że wartość w różnicy $g_m - s(C_f + C_{gd})$ pojemności są do zaniebdania (jest to słuszne dla małych częstotliwości pracy układu, wtedy gdy $j\omega C \ll g_m$) oraz, że iloczyn pojemności jest nieskończenie mniejszy w porównaniu do iloczynu pojemności i transkonduktancji. W efekcie otrzymujemy uproszczony wzór na napięciową odpowiedź na wymuszenie prądowe:

$$U_{out} = -i_{det} \frac{1}{s(C_f + C_{gd})} \quad (\text{B.5})$$

Bibliografia

- [1] Kazimierz Korbel: *Profilaktyka i terapia antyszumowa układów elektroniki „front – end”*. Skrypt uczelniany AGH Nr 1523, Wydawnictwa AGH, Kraków 1997
- [2] Kazimierz Korbel: *Ekstrakcja informacji z sygnału radiometrycznego*. Wydział Fizyki i Informatyki Stosowanej AGH, Kraków 2006
- [3] Kazimierz Korbel, Władysław Dąbrowski: *Filtracja sygnału w spektrometrycznym torze pomiarowym*. Skrypt Uczelniany AGH Nr 1318, Wydawnictwa AGH, Kraków 1992
- [4] Kazimierz Korbel: *Układy elektroniki front - end*, SPRAWDZIC
- [5] Behzad Razavi: *Design of Analog CMOS Integrated Circuits*. McGraw – Hill International Edition (Electrical Engineering Series), 2001
- [6] Willy M. C. Sansen, Zhong Yuan Chang: *Limits of Low Noise Performance of Detector Readout Front Ends in CMOS Technology*. IEEE Transactions on circuits and systems tom 37 nr 11, listopad 1990
- [7] S. Ohkawa, M. Yoshizawa, K. Husimi: *Direct synthesis of the gaussian filter for nuclear pulse amplifiers*. Nuclear Instruments and Methods Nr 138 str. 85-92, 5 sierpnia 1976
- [8] Mayer Gray: *Analysis and Design of Analog Integrated Circuits*. Wydawnictwo John Wiley and Sons, 2001
- [9] Bohdan Dziunikowski, Stefan J. Kalita: *Ćwiczenia laboratoryjne z jądrowych metod pomiarowych* (wydanie drugie zmienione). Skrypt uczelniany 1440, Wydawnictwa AGH, Kraków 1995
- [10] G. Drwal, R. Grzymkowski, A. Kapusta, D. Słota: *Mathematica 5*. Wydawnictwo Pracowni Komputerowej Jacka Skalmierskiego, Gliwice 2004
- [11] E. Gatti, P. F. Manfredt: *Processing the Signals from Solid – State Detectors in Elementary – Particle Physics*. Rivista del Nuovo Cimento tom 9 nr 1, 5 czerwca 1985
- [12] Bohdan Dziunikowski: *O fizyce i energii jądrowej*. Uczelniane Wydawnictwa Naukowo–Dydaktyczne, Kraków 2001
- [13] Claus Grupen: *Physics of Particle Detection*. Sigen, Germany, 2001

Spis rysunków

2.1.	Schemat blokowy układu odczytu impulsów z detektora	9
2.2.	Schemat złącza $p^+ - n$ z zaznaczonymi obszarami typu n i p^+	11
2.3.	Schemat złącza $p - n$ oraz rozkład potencjału i natężenia pola w takim złączu spolaryzowanym w kierunku zaporowym.	13
2.4.	Zależność gęstości prądu generacyjno – rekombinacyjnego od temperatury pracy złącza $p - n$	15
2.5.	Rozkład makroskopowych przekrojów czynnych na procesy absorpcji i rozpraszania w funkcji energii	16
2.6.	Absorpcja fotoelektryczna fotonu o energii $h\nu$ przez elektron na powłoce K atomu z emisją elektronu	17
2.7.	Zjawisko niekoherentnego (Comptonowskiego) rozpraszania fotonu na słabo związanym elektronie walencyjnym	18
2.8.	Rozkład średnich strat energii cząstki relatywistycznej (rozkład Landaua)	19
2.9.	Układ elektrod spełniających założenia twierdzenia Ramo	20
2.10.	Schemat detektora półprzewodnikowego typu złącze $p - n$ z zaznaczonym miejscem punktowej generacji	21
2.11.	Przebieg czasowy składowej elektronowej i dziurowej dla trzech punktów generacji nośników	24
2.12.	Rzeczywisty rozkład pola elektrycznego w złączu $p - n$	24
2.13.	Schemat układu detektora i przedwzmacniacza ładunkowego	25
2.14.	Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem	26
2.15.	Odpowiedź impulsowa przedwzmacniacza ładunkowego z rezystywnym sprzężeniem zwrotnym	27
2.16.	Tranzystor wejściowy przedwzmacniacza z prądowym źródłem szumowym kanału tranzystora	28
2.17.	Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez kanał tranzystora	29
2.18.	Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez ekwiwalentne źródło napięciowe	29
2.19.	Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez kanał tranzystora	30
2.20.	Schemat zastępczy tranzystora wejściowego przedwzmacniacza do obliczeń szumów generowanych przez ekwiwalentne źródło prądowe	31
2.21.	Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i wszystkimi źródłami szumów	33
2.22.	Przykładowy sygnał wejściowy i odpowiedź filtru optymalnego	38
2.23.	Schemat filtru optymalnego z prefiltrem wybielającym szumy	39
2.24.	Poglądowa zależność częstotliwościowa szumów białych, szumów czerwonych oraz pasmo przenoszenia filtru wybielającego	41
2.25.	Schemat układu z wyodrębnioną częścią detektora, przedwzmacniacza oraz filtru	43
2.26.	Schemat blokowy filtru typu $CR - (RC)^p$	44
2.27.	Stosunek sygnału do szumu w odniesieniu do stosunku sygnału do szumu dla filtru optymalnego	46
2.28.	Przykład realizacji filtru trójkątnego	46
2.29.	Przykład realizacji filtru z biegunami zespolonymi	50

2.30.	Powiększone obszary przerzutów impulsów po filtrach z biegunami zespolonymi w zakresie czasu trwania przerzutu	53
2.31.	Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów napięciowych przy zachowaniu stałego <i>peaking time</i> impulsu $T_{peak} = 100 ns$	56
2.32.	Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu stałego <i>peaking time</i> impulsu $T_{peak} = 100 ns$	57
2.33.	Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów napięciowych przy zachowaniu stałego czasu trwania impulsu $T_{0,1\%} = 500 ns$	60
2.34.	Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu stałego czasu trwania impulsu $T_{0,1\%} = 500 ns$	61
2.35.	Zależność ekwiwalentnego ładunku szumowego od pierwiastka z gęstości widmowej mocy szumów prądowych przy zachowaniu stałego czasu trwania impulsu $T_{0,1\%} = 500 ns C_{in} = 5 pF$)	63
3.1.	Schemat ideowy filtru	64
3.2.	Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^2$	69
3.3.	Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^4$	70
3.4.	Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze z biegunami zespolonymi rzędu 2	71
3.5.	Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze z biegunami zespolonymi rzędu 4	72
3.6.	Teoretyczne oraz zmierzone przebiegi czasowe impulsu po filtrze $CR - (RC)^4$ dla czasów kształtowania poniżej $1 \mu s$	73
3.7.	Porównanie impulsów dla filtru rzeczywistego i zespolonego rzędu 2	74
3.8.	Porównanie impulsów dla filtru rzeczywistego i zespolonego rzędu 4	74
3.9.	Teoretyczne i zmierzone charakterystyki częstotliwościowe czterech rodzajów filtrów dla różnych czasów kształtowania	76
3.10.	Widmo szumów białych podawanych z generatora	77
3.11.	Teoretyczna i zmierzona zależność <i>rms</i> szumów od stałej czasowej kształtowania dla czterech rodzajów filtracji	78
3.12.	Widma szumów na wyjściu filtru $CR - (RC)^2$ dla różnych stałych czasowych kształtowania	79
3.13.	Widmo szumów typu 1/f podawanych z generatora	81
3.14.	Zależność gęstości widmowej mocy szumów od odwrotności częstotliwości	81
3.15.	Zmierzona zależność <i>rms</i> szumów od stałej czasowej kształtowania dla dwóch typów kształtowań: $CR - RC^2$ oraz zespolonego rzędu 2	82
3.16.	Schemat przedwzmacniacza ładunkowego	83
3.17.	Zmierzone widma szumowe na wyjściu filtru typu $CR - RC^2$ oraz zespolonego rzędu 2 dla różnych stałych czasowych	84
3.18.	Zmierzona zależność <i>ENC</i> od stałej czasowej kształtowania dla dwóch rodzajów filtracji	85
A.1.	Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowym	91
A.2.	Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowymi po zastąpieniu jednego źródła napięciowego kilkoma	92
A.3.	Schemat układu przedwzmacniacza ładunkowego wraz z detektorem i ekwiwalentnymi źródłami szumowymi po zastosowaniu twierdzenia Nortona	92

B.1. Układ do liczenia odpowiedzi prądowej przedwzmacniacza ładunkowego	95
B.2. Uproszczony układ do liczenia odpowiedzi prądowej przedwzmacniacza ładunkowego	95

Spis tabel

2.1.	Numeryczne wartości biegunów dla kilku rzędów pierwszych rzędów wielomianu Hurwitza	50
2.2.	Analityczne i numeryczne porównanie różnych technik filtracji przy zastosowaniu parametru SNR	52
2.3.	Wartość przerzutu impulsów po filtrze zespolonym wyrażona w procentach amplitudy	53
2.4.	Porównanie różnych technik filtracji przy zadanym czasie trwania impulsu $T_{0,1\%} = 1 \mu s$	54
2.5.	Analityczne i numeryczne porównanie filtracji typu $CR - (RC)^p$ przy zastosowaniu parametru ENC	59
3.1.	Bieguny rozwinięcia w szereg Taylora wielomianu Hurwitza dla rzędu 2 oraz 4	66
3.2.	Stałe czasowe dwóch rodzajów filtracji ustawiane w układzie (wszystkie wartości podawane są w μs)	68
3.3.	Tabela porównawcza czasów trwania impulsów po filtrze zespolonym i rzeczywistym	75
3.4.	Teoretyczne i zmierzone wartości V_{rms} szumów dla wszystkich czterech typów kształtowania	80
3.5.	Zmierzone wartości sigm szumów na wyjściu filtru $CR - (RC)^2$ i filtru zespolonego rzędu 2	82
3.6.	Zmierzone wartości σ na wyjściu filtru z biegunami zespolonymi i rzeczywistymi	85